الرياضيات التطبيقية

✯المصفوفات والمحددات Matrixes and determinants✯

المصفوفة :المصفوفة هي عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة على شكل مستطيل . وسنفرض جميع المدخلات في المصفوفة على أنها تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية والمعقدة

يُرمز للمصفوفة بالرموز ....A,B,C, ومُدخلات المصفوفة بالرمز a_{ij} :

$$A = [a_{ij}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & \\ a_{m1} & \cdots\cdots & & a_{mn} \end{vmatrix}_{m*n}$$

المصفوفة   مدخلات المصفوفة

حيث: m ← صف

n ← عمود

الصف Row ⟶ i= 1,2,3,…..m

العمود Column⟶ j= 1,2,3,…..n

تسمى المصفوفة مربعة اذا كانت المصفوفة Aمن السعة m*n واذا كان m=n (أي ان عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة)

✎ **Example:(1)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3*3}$$

♧أنواع المصفوفات Diagonal Matrix (المصفوفة القطرية)

المصفوفة القطرية: تسمى المصفوفة قطرية عندما جميع عناصر قطرها متساوية ولها قيمة ثابتة (Constant (C حيث ان aij=c لكل i=j

✎ **Example:(2)**

القطر الرئيسي

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{4*4}$$

القطر الثانوي

المصفوفة الصفرية: Zero Matrix أو Null Matrix

وهي المصفوفة التي يكون جميع مدخلاتها أصفار

✎ **Example :(3)**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3*3}$$

Identity Matrix : المصفوفة الوحدة

هي المصفوفة التي يكون جميع عناصر قطرها الرئيسي واحد والباقي اصفار . ونرمز لها بالرمز I .

✎ **Example:(4)**

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2*2} \quad ; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3*3}$$

Triangular Matrix : المصفوفة المثلثية

i- المصفوفة المثلثية العليا :وهي المصفوفة التي تكون جميع المدخلات الواقعة تحت القطر الرئيسي تكون أصفار .

✎ **Example:(5)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}_{3*3} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2*2}$$

ii- المصفوفة المثلثية السفلى :وهي المصفوفة التي تكون جميع مدخلاتها فوق القطر الرئيسي أصفار .

✎ **Example:(6)**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{3*3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{2*2}$$

Transpose of Matrix : مُدور المصفوفة

وهي تغيير أعمدة المصفوفة بدل صفوفها أو تغيير الصفوف بدل الأعمدة

✎ **Example:(7)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2*3} \quad ; \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3*2}$$

المصفوفة المنفردة :
هي المصفوفة التي تكون قيمة محددها يساوي صفر ، مثال تمرين (15) .

المصفوفة غير المنفردة :
هي المصفوفة التي تكون قيمة محددها لا تساوي صفر($\neq 0$)

✎ **Example: (8)**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2*2}$$

قيمة المحدد $|A| = 2*5 - 1*4 = 10 - 4$

$$\therefore |A| = 6$$

ان هذه المصفوفة غير منفردة لان قيمة محددها (6) أي لا يساوي صفر

✎ **Example: (9)**

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}_{2*2}$$

; $|B| = 3*4 - 2*6$

$= 12 - 12 = 0$

المصفوفة منفردة لان قيمة محددها يساوي صفر

طريقة إيجاد قيمة المحدد لمصفوفة من السعة 2*2:

القطر الرئيسي ↘   ↙ القطر الثانوي

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

نوجد قيمة المحدد كما يلي : حاصل ضرب القطر الأول الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب القطر الثانوي

$$\therefore D_2 = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

D_2 يسمى محدداً من الدرجة الثانية

المحددات للمصفوفات: Determinants

القيمة العددية للمصفوفات

المحدد :هي مجموعة عناصرها تكتب على شكل صفوف وأعمدة رباعي الشكل ويكون محصور بين مستقيمين شاقوليين ويرمز له بالرمز |A| أو det. A أو D

✎**Example:(10)** Find the value of the following determinant

جد قيمة ما يلي للمحددات :

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 6\end{bmatrix}$$

سالب موجب

$$|A| = 3*6-2*4$$
$$= 18-8 = 10$$

أي إن القطر المتجه نحو اليمين (القطر الرئيسي) يكون موجب بينما يكون القطر المتجه نحو اليسار (القطر الثانوي) سالب

☞**مثال: جد قيمة X إذا كان**

$$A=\begin{bmatrix}X & 4\\ 1 & X\end{bmatrix}=0$$

Solution : **الحل:**

$$X^2-4=0$$
$$\therefore X^2=4$$
$$\therefore X=\pm 2$$

☺بعض العمليات الجبرية على المصفوفات:

Addition and subtraction الجمع والطرح

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}_{2*2} \qquad B=\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}_{2*2}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}a_1+b_1 & a_2+b_2\\ a_3+b_3 & a_4+b_4\end{bmatrix}_{2*2}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}a_1-b_1 & a_2-b_2\\ a_3-b_3 & a_4-b_4\end{bmatrix}_{2*2}$$

by constant **ضرب المصفوفة * ثابت**

✎**Example:(11)** Let

$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ And C=3 Find C_*A

Solution : **الحل:**

$$C_*A = 3\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3*1 & 3*3\\ 3*2 & 3*0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 9\\ 6 & 0\end{bmatrix}=0-54=-54$$

✎ **Example:(12)** Find $|2*A|+|3*B|$ IF :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \quad ، \quad B=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

Solution : الحل:

$$|2*A|=2*\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 6\end{vmatrix}=12-0=12$$

$$|3*B|=3*\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6\\ 3 & 9\end{vmatrix}=0-(-6*3)=18$$

$$\therefore |2*A|+|3*B|=12+18=30$$

إيجاد المحددات لمصفوفة من السعة 3*3:

هناك عدة طرق لإيجاد المحددات من السعة 3*3

الطريقة الأولى : الطريقة الخاصة أو طريقة التدوير (Rotate)

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}_{3*3}$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}\end{array}\right|$$

وتطبق هذه الطريقة حسب الخطوات التالية :

نكرر كتابة العمودين الأول والثاني بالترتيب إلى يمين المحدد

إيجاد المجموع الجبري لنتائج ضرب عناصر الأقطار الموجبة والسالبة كما هو مبين في الأسهم (أعلاه) وكما يلي :

$$|A|=(a_{11})(a_{22})(a_{33})+(a_{12})(a_{23})(a_{31})+(a_{13})(a_{21})(a_{32})$$
$$-(a_{13})(a_{22})(a_{31})-(a_{11})(a_{23})(a_{32})-(a_{12})(a_{21})(a_{33})$$

الطريقة الثانية(طريقة التجزئة)

لإيجاد قيمة المحدد يجب ملاحظة قانون الإشارات أو (قاعدة الإشارات) المبينة أدناه للعناصر داخل المحدد بغض النظر عن إشارة العنصر نفسه

يُفتح المحدد بستة طرق وكالاتي :

باستخدام الصف الأول

باستخدام الصف الثاني

باستخدام الصف الثالث

باستخدام العمود الأول

باستخدام العمود الثاني

باستخدام العمود الثالث

☆**ملاحظة☆:تكون إشارة العنصر الأول في الصف الأول والعمود الأول ثابتة في حين تكون بقية العناصر فيما يتعلق بالصف الأول والعمود الأول مخالفة للعنصر الذي يسبقها بالإشارة.**

☀**قاعدة الإشارات**☀

	العمود الاول	العمود الثاني	العمود الثالث	
R1 الصف الأول	+	-	+	$(-1)^{i+j}$ i= رقم الصف j= رقم العمود
R2 الصف الثاني	-	+	-	
R3 الصف الثالث	+	-	+	

$Ex: (-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1$

✎**Example:(13)** Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}_{3*3}$$

Solution : **الحل:**

$$|A| = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \\ 7 & -8 \end{matrix}$$

$$|A| = (1)(5)(9) + (2)(6)(7) + (3)(-4)(-8)$$
$$-(3)(5)(7) - (1)(6)(-8) - (2)(-4)(9)$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 + 48 + 72$$
$$\therefore |A| = 240$$

✎**Example:(14)** Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3*3}$$

Solution : 				:الحل

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} -2 & -5 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$|A| = (2*0*-1) + (-5*7*0) + (4*2*1) - (4*0*0) - (-2*7*1) - (-5*2*-1)$$

$$\therefore |A| = 0 + 0 + 8 - 0 + 14 - 10$$

$$\therefore |A| = 12$$

✎**Example:(15)** Find the value of the det .A

جد قيمة المحدد التالي بطريقة التجزئة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل بالنسبة للصف الأول :

$$|A| = 2\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(-7 + 36) - 3(35 - 18) - 4(-30 + 3)$$

$$|A| = 2(29) - 3(17) - 4(-27)$$

$$|A| = 58 - 51 + 108 = 115$$

الحل بالنسبة للصف الثاني :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -5\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -5(21 - 24) - (14 + 12) - 6(-12 - 9)$$

$$|A| = 15 - 26 + 126 = 115$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد قيمة المحدد

✎**Example:(16)** Find the value of the det .A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solution : **الحل:**

$$|A| = 1*\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 1*\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2*\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -1 - 1 + 4 = 2$$

☆ملاحظة☆ :

ان طريقة تفيد في حل المحددات من الدرجة الرابعة والخامسة . وبذلك يمكن دمج الطريقتين : طريقة التجزئة مع الطريقة الخاصة (طريقة التدوير) لحل محدد من الدرجة الرابعة .

1- المعادلات الخطية :

✎**Example(1):** ***Solve the linear equations***

☜**مثال : حل النظام الخطي بعدة طرق**

$$x + y = 4 \qquad \cdots(1)$$
$$3x - 2y = 2 \qquad \cdots(2)$$

الطريقة الأولى : طريقة الحذف وكما يلي :

نضرب المعادلة (1) *3 والمعادلة (2) *-1 ينتج :

$$3x + 3y = 12 \qquad \cdots(1)$$
$$-3x + 2y = -2$$

بالجمع

$$5y = 10 \quad \Rightarrow y = \frac{10}{5} = 2$$

$$\therefore y = 2$$

نعوض عن قيمة y في المعادلة ينتج :

$$\therefore y = 2$$
$$x = 2 \quad , \quad y = 2$$

الحل باستخدام المصفوفة

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow \\ R_2 \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{2*2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2*1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_{2*1}$$

نضرب الصف الأول *3

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow \\ R_2 \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{2*2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2*1} = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}_{2*1}$$

بطرح الصف الثاني من الصف الأول

$$R_1 - R_2 \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \therefore 5y = 10 \quad \Rightarrow \therefore y = 2$$
$$\therefore x = 2$$

حل النظام هو x=2
Y=2

♚نظرية أو قاعدة كَرامر Gramer's Rule♚

لتكن AX=B نظام من المعادلات الخطية التي رتبتها n*n وتحتوي على n من المجاهيل بحيث ان محددها 0≠|A| عندئذ يكون للنظام حل وحيد أي ان :

$$X1=\frac{|A_1|}{|A|} \quad , X_2=\frac{|A_2|}{|A|} \quad ,........,Xn=\frac{|An|}{|A|}$$

✎**Example(2): Find the solution of x,y by using Gramer's Rule**

استخدم قاعدة كَرامر لحل نظام المعادلات :

$$2x-3y=8 \qquad \cdots(1)$$
$$3x+y=1 \qquad \cdots(2)$$

Solution :

الحل:

اجعل النظام بشكل صيغة مصفوفة

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix}$$

*** نستخرج المحدد الأصلي للمصفوفة (D)**

$$D=\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & 1\end{vmatrix}=(2*1)-(-3*3)$$
$$=2+9=11$$
$$D_1=\begin{vmatrix}8 & -3\\1 & 1\end{vmatrix}=(8*1)-(-3*1)$$
$$=8+3=11$$

نستخرج المحدد (D_2) وذلك بحذف العمود الثاني والتعويض عنه بالعمود الثالث (عمود الحدود المطلقة) وكمايلي :

$$D_2=\begin{vmatrix}2 & 8\\3 & 1\end{vmatrix} \quad \Rightarrow D_2=2-24$$
$$\therefore D_2=-22$$

$$X=\frac{|D_1|}{|D|} \quad =\frac{11}{11} \quad =1$$

$$y=\frac{|D_2|}{|D|} \quad =\frac{-22}{11} \quad =-2$$

$$\therefore x=1 \quad , \quad y=-2$$

:Proof ☻ التحقيق

نعوض عن قيم x,y في المعادلتين أعلاه ينتج

$$2+1-3(-2)=8$$
$$2+6=8$$
$$8=8$$

مثال (3): استخدام قاعدة كَرامر لحل المعادلات الخطية

$$x - y = 1$$
$$x - z = 3$$
$$y + z = 8$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{D_1}{D} \quad , \; y = \frac{D_2}{D} \quad , z = \frac{D_3}{D}$$

$$D = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} a$$

$$D = 1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(\ 0+1) + 1(\ 1) + 0 = 1 + 1 = 2$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1(\ 1) + (\ 3 + 8) + 0 = 1 + 11 = 12$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 1\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= 1(\ 3 + 8) - 1(\ 1) = 11 - 1 = 10$$

$$\therefore D_2 = 10$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$=1\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 8\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 8\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=1(\ 0-3)+1(\ 8)+1(\ 1)$$
$$=-3+8+1=6$$

$$X=\frac{D_1}{D}=\frac{12}{2}=6\ \ ,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{10}{2}=5\ \ ,z=\frac{D_3}{D}=\frac{6}{2}=3$$

✎**<u>Example</u>(4): Find the solution of x,y,z by using Gramer's Rule**

(استخدم قاعدة كَريمر لايجاد قيم x,y,z)

$$4x+y+z=5 \quad ....(\ 1\ )$$
$$3x+y+4z=10 \quad ....(\ 2\ )$$
$$x+y+z=2 \quad ....(\ 3\ )$$

<u>Solution</u> : **الحل:**

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 10\\ 2\end{bmatrix}$$

$$D=\left|\begin{array}{ccc|cc}4 & 1 & 1 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right|$$

$$D=4+4+3-1-16-3=-9 \quad \Rightarrow \therefore D=-9$$

$$D_1=\left|\begin{array}{ccc|cc}5 & 1 & 1 & 5 & 1\\ 10 & 1 & 4 & 10 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1\end{array}\right|$$

$$D_1=5+8+10-2-20-10=-9 \quad \Rightarrow \therefore D_1=-9$$

$$D_2=\left|\begin{array}{ccc|cc}4 & 5 & 1 & 4 & 5\\ 3 & 10 & 4 & 3 & 10\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right|$$

$$D_2=40+20+6-10-32-15 \Rightarrow \therefore D_2=9$$

$$D_3=\left|\begin{array}{ccc|cc}4 & 1 & 5 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 10 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1\end{array}\right|$$

$$\therefore X=\frac{D_1}{D}=\frac{-9}{-9}=1\ \ ,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{9}{-9}=-1\ \ ,z=\frac{D_3}{D}=\frac{-18}{-9}=2$$

✎**Example(5): Find the value of x**

جد قيمة x

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2x^2 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Solution : **الحل:**

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2x^2 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 1 \\ 2x^2 & -x \\ -1 & 1 \end{matrix} = 0$$

$$4x-1+4x^2-2x-4+2x^2=0$$

$$6x^2+2x-5=0$$

a b c

*** المعادلة الناتجة هي معادلة من الدرجة الثانية لذلك نستخدم طريقة الدستور لحل هذه المعادلة**

قانون الدستور

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حيث : a=6 , b=2 ,c=-5

$$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(6)(-5)}}{2(6)}$$

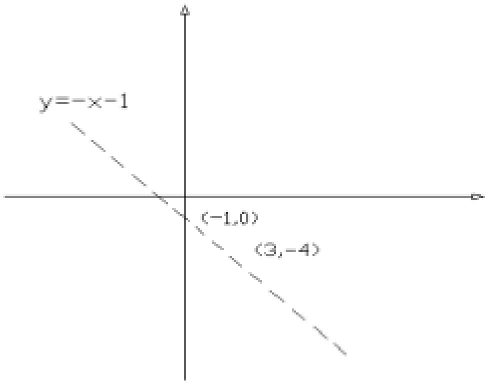
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+120}}{12}=\frac{-2\pm\sqrt{124}}{12}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4*31}}{12}=\frac{-2\pm2\sqrt{31}}{12}=\frac{-1\pm\sqrt{31}}{6}$$

$$\therefore \text{if } x=\frac{-1-\sqrt{31}}{6} \text{ or } x=\frac{-1+\sqrt{31}}{6}$$

<u>مثال(6) :</u>اثبت ان حل المحدد التالي هو عبارة عن معادلة خط مستقيم يمر بالنقاط (4 -,3) ,(-1,0) مع الرسم ؟

x	y
0	−1
1	−2
−1	0



$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

الحل:

<u>Solution</u> :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} x & y & 1 & x & y \\ 3 & -4 & 1 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] = 0$$

$$-4x - y + 0 - 4 - 0 - 3y = 0$$
$$-4x - 4y - 4 = 0$$

بالقسمة على 4 – ينتج :

معادلة المستقيم ⟵ $x + y + 1 = 0$

نعوض في النقاط (-1,0) ينتج :

$(-1,0) \Rightarrow -1 + 0 + 1 = 0$

النقطة **,(4 -,3) ينتج :**

$(3,\ -4) \Rightarrow 3 - 4 + 1 = 0$

تمارين تطبيقية :-

1) $3x+3y=2$

$6x+3y=1 \qquad \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$y=1$

---

2) $3x-y=2$

$3x-2y=5 \qquad \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$y=-3$

---

3) $3x+4y=11$

$-x+2y=3 \qquad \Rightarrow x=1$

$y=2$

---

4) $3x=5+y$

$-x=2-4y \qquad \Rightarrow x=2$

$y=1$

---

5) if $A=\begin{bmatrix}5 & y\\ 3 & 2\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ x^2-1 & 2\end{bmatrix}$

and if $[A]=[B]$ Find the value of x and y

---

6) find the value of k by det.

$\begin{bmatrix}2k & 1\\ 8 & 1\end{bmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 3 & k\end{vmatrix}$

---

7) if $A=\begin{bmatrix}8 & 4\\ 5 & y\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}x^2-1 & 4\\ 5 & 0\end{bmatrix}$

and if $[A]=[B]$ Find the value of x and y

---

8) Find the value of a,b,c if

$$\begin{bmatrix}5b+1 & 0\\ 3c & 8\\ -3 & 2a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 9 & 8\\ -3 & 3\end{bmatrix}$$

---

9) $\begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix} = 0$ Find the value of x and

proof has roots $x = 2$, $x = -3$

---

10) Find the determint of order A,B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 6 \qquad \Rightarrow |B| = -2$$

---

11) $x = 1 - y - 2z$ $\qquad x = \frac{1}{2}$ By Gramer's Rule

$2x - y - z = 0 \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}$

$x + 2y = 4 + z \qquad z = -\frac{1}{2}$

---

12) Find the value of x,y,z by Gramer's Rule

$2x + y - z = 0 \qquad x = 2$

$x + z - y = 6 \qquad \Rightarrow \quad y = -1$

$x + 2y + z = 3 \qquad z = 3$

---

13) $2x + y - z = 2 \qquad x = 3$

$x - y + z = 7 \qquad \Rightarrow \quad y = -1$

$x + 2y + z = 4 \qquad z = 3$

استخدم المحدد الرباعي لايجاد قيمة t,z,y,x باستخدام قاعدة كَرامر

14) $2x + 3t - y = -3$

$t + 2z + x - 3 = 0$

$3y - 3z + 2t = -13 \quad \Rightarrow |A| = 105$

$4x + 3y + 2z = 5 \quad \Rightarrow |A_1| = 105$

$\Rightarrow |A_2| = 105$

---

15) $2x - y + z = 4$

$x + 3y + 2z = 12 \qquad \Rightarrow |A| = 0$

$3z + 2y + 3x = 16$

---

16) $3x+5y=1-z$

$4x+y=2+z \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{5}$

$5x-y=3+z$

$x=\frac{3}{5}$, $z=\frac{1}{5}$

---

17) $x_1+x_2+x_3=4 \qquad x_1=5$

$2x_3+3x_2+2x_1=5 \quad \Rightarrow \quad x_2=-3$

$3x_1+4x_2-3x_3=-3 \qquad x_3=2$

---

18) $x=2+y$

$2y=x-z+1$

$2z=-2-y$

---

19) $3x+2y-z=4 \qquad x=1$

$-x+4y+z=10 \quad \Rightarrow \quad y=2$

$x+y+z=6 \qquad z=3$

أوجد قيمة المحدد الثلاثي باستخدام طريقة التجزئة

20)

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$|A|=-24 \qquad |B|=-49$

---

21) i) $x+2z=1$

$y=-z-1$

$x=-y+z+2$

ii) $2x+y-z=4$

$y+z=5$

$x-2y=1$

أوجد قيمة المحدد الثلاثي باستخدام طريقة التجزئة والتدوير

22)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

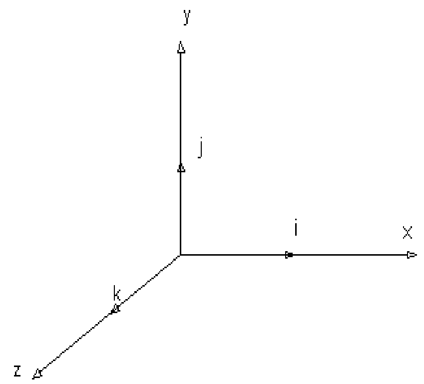
$|A|=13 \qquad |B|=-42$

♣المتجهات والقيم العددية : ♣Vectors and Scalars

تسمى الكميات التي لها مقدار عددي وليس لها اتجاه بالقيم العددية (وتكون غير اتجاهيه) مثل الطول ، الزمن ،درجة الحرارة ، المساحة .... الخ.
أما الكميات التي لها مقدار عددي واتجاه تسمى بالمتجهات Vectors مثل القوة $\bar{F}$ (Force) والسرعة $\bar{V}$ (Velocity) والتعجيل $\bar{a}$ (acceleration)

ويرمز للمتجهات بالرموز ...... ,$\bar{A}$,$\bar{B}$,$\bar{C}$,$\bar{V}$ ولكل متجه ثلاثة متغيرات هي k,j,i ويكتب

$$\bar{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$



✎ **Example:**

$\bar{A} = 1i + 2j + 3k$

حيث ان a_3, a_2, a_1 هي قيم معلومة كما في المثال اعلاه .

♠♠العمليات الجبرية على المتجهات♠♠ :

الجمع والطرح .
ضرب المتجه في عدد ثابت.
إيجاد طول المتجه.
أيجاد متجه الوحدة العمودي $\bar{u}$ لمتجه واحد.
إيجاد قيمة الضرب الديكارتي Cros (x).
إيجاد قيمة متجه الوحدة العمودي $\bar{u}$ بين متجهين $\bar{u}(\bar{A},\bar{B})$.
إيجاد قيمة الزاوية (θ) بواسطة استخدام قانون Sin
إيجاد الضرب العددي (Dot) وإيجاد الزاوية (θ) بواسطة Cos

✎ **Example:**

ليكن $\bar{B},\bar{A}$ متجهين هما

$\bar{A} = 2i + 3j + 4k$

$\bar{B} = i + j + k$

أوجد -1 $\bar{A}+\bar{B}$ -2 $\bar{A}-\bar{B}$ -3 $3\bar{B},5\bar{A}$ -4 $|\bar{B}|,|\bar{A}|$ -5 $u(\bar{B}),\bar{u}(A)$

-6 $\bar{A}x\bar{B}$ -7 $|\bar{A}\,x\,\bar{B}|$ -8 $\bar{u}(\bar{A},\bar{B})$ -9 $\theta \frown \bar{A},\bar{B})$ -10 $\bar{A}.\bar{B}$

$1-\vec{A}+\vec{B}$

$$\vec{A}=2i+3j+4k$$
$$\vec{B}=i+j+k$$
$$\overline{\vec{A}+\vec{B}=3i+4j+5k}$$

2- $\vec{A}-\vec{B}$

$$\vec{A}=2i+3j+4k$$
$$\vec{B}=i+j+k$$
$$\overline{\vec{A}-\vec{B}=1i+2j+3k}$$

3- *** صيغة القانون**

$$\vec{A}=a_1i+a_2j+a_3k$$
$$\vec{B}=b_1i+b_2j+b_3k$$
$$\overline{\vec{A}\pm\vec{B}=(a_1+b_1)i+(a_2+b_2)j+(a_3+b_3)k}$$

3-

$$5\vec{A}=(5x_2)i+(5x_3)j+(5*4)k$$
$$=10i+15j+20k$$
$$3\vec{B}=3i+3j+3k$$

*** صيغة القانون (C) هو عدد ثابت (constant)** $c\vec{A}=ca_1i+ca_2j+ca_3k$

4-

$$|\vec{A}|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}$$
$$=\sqrt{4+9+16}=\sqrt{29}=5.385$$
$$|\vec{B}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}=1.732$$

*** صيغة القانون :** $|\vec{A}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$

دائماً الطول للمتجه يكون موجب اذا كان أي قيمه (-)لأن $(-)^2=+$

المدرس. مها محسن

5- $\vec{u}(\vec{A})=\dfrac{2i+3j+4k}{\sqrt{29}}$

$$\vec{u}(A)=\frac{2}{\sqrt{29}}i+\frac{3}{\sqrt{29}}j+\frac{4}{\sqrt{29}}k$$

$$\vec{u}(\vec{B})=\frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}i+\frac{1}{\sqrt{3}}j+\frac{1}{\sqrt{3}}k$$

❊متجه الوحدة

* صيغة القانون :

$$\vec{u}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{a_1i+a_2j+a_3k}{|\vec{A}|}$$

$$=\frac{a_1}{|A|}i+\frac{a_2}{|A|}j+\frac{a_3}{|A|}k$$

❀الضرب بطريقة (cros)

لحل هذا المحدد نستخدم طريقة التجزئة

6 - $\vec{A}\,x\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\vec{A}\,x\vec{B}=i\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=i(3-4)-j(2-4)+k(2-3)$$

$$=-i+2j-k$$

7- $|\vec{A}\,x\vec{B}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

❀ صيغة القانون :

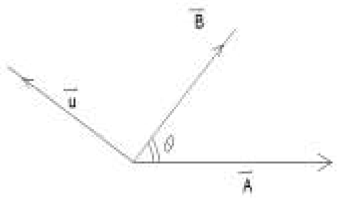
$$\vec{A}\,x\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=i\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=i(a_2b_3-a_3b_2)-j(a_1b_3-a_3b_1)+k(a_1b_2-a_2b_1)$$

8- $\vec{u}(\vec{A},\vec{B}) = \dfrac{A\,x\,B}{|A\,x\,B|}$

$$\vec{u}(\vec{A},\vec{B}) = \frac{-i+2j-k}{\sqrt{6}}$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{6}}i + \frac{2}{\sqrt{6}}j - \frac{1}{\sqrt{6}}k$$



9- $\theta \frown \vec{A},\vec{B})$ — **لاستخراج الزاوية θ حسب قانون الضرب ألاتجاهي (الديكارتي)**

$$|\vec{A}\,x\vec{B}| = |\vec{A}|x|\vec{B}|.Sin\theta$$
$$\sqrt{6} = \sqrt{29}x\sqrt{3}.Sin\theta$$
$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29}x\sqrt{3}} = Sin\theta$$
$$Sin^{-1}.Sin\theta = Sin^{-1}(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29}x\sqrt{3}})$$
$$\therefore \theta = Sin^{-1}(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{29}x\sqrt{3}}) = Sin^{-1}(\frac{2.449}{9.327})$$
$$= Sin^{-1}(0.2626)$$
$$\theta = 15^{\circ}.22$$

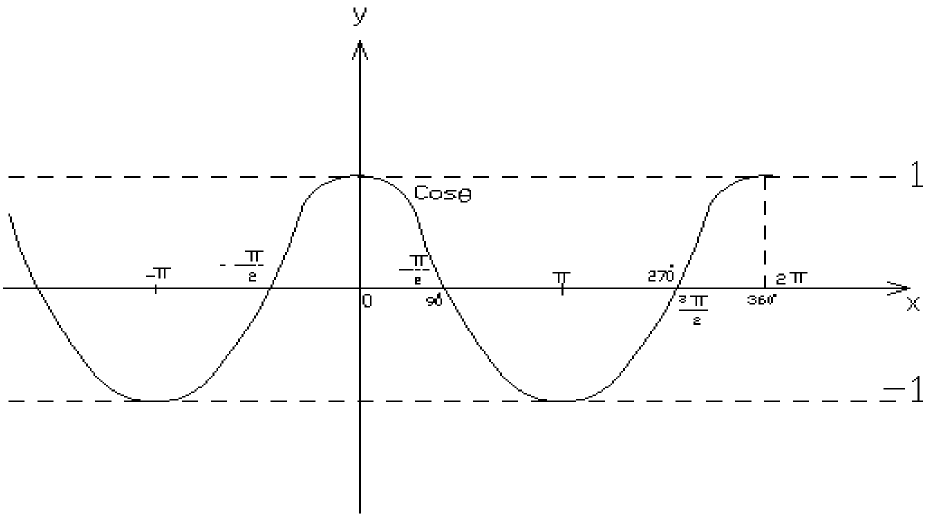
10- $\vec{A}.\vec{B}$ — **<u>الضرب العددي : أي يكون الناتج دائماً عبارة عن عدد</u> (Dot)**

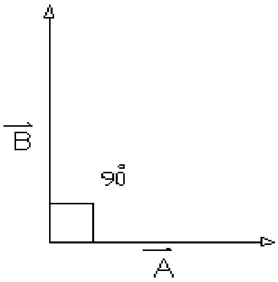
$$\vec{A} = 2i + 3j + 4k$$
$$\vec{B} = i + j + k$$
$$\vec{A}.\vec{B} = (2x1) + (3x1) + (4x1)$$
$$= 2 + 3 + 4 = 9$$

لإيجاد قيمة الزاوية θ من صيغة $\vec{A}.\vec{B}$ نستخدم القانون

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|x|\vec{B}|.Cos\theta$$
$$9 = \sqrt{29}x\sqrt{3}.Cos\theta$$
$$Cos\theta = (\frac{9}{\sqrt{29}x\sqrt{3}})$$
$$\therefore Cos^{-1}.Cos\theta = Cos^{-1}(\frac{9}{\sqrt{29}x\sqrt{3}})$$
$$\theta = Cos^{-1}(\frac{9}{\sqrt{29}x\sqrt{3}}) = Cos^{-1}(\frac{9}{9.327})$$
$$\therefore \theta = Cos^{-1}(0.965) = 15^{\circ} \cdot 22$$

★**إذا كان المتجهين $\vec{A},\vec{B}$ متعامدين فان الزاوية تكون 90° وتكون قيمة** $Cos(90^{\circ}) = 0$





✎ **<u>Example:</u>**

$\vec{A} = i + j + k$

$\vec{B} = 2i - j - k$

$\vec{C} = 2i + 3j + 5k$

Find:

1- $\vec{A} + \vec{B}$ 2- $|2\vec{A} - 3\vec{C}|$ 3- $|\vec{A} x \vec{B}|$ 4- $\vec{A}.\vec{B}$ 5- $\theta(\vec{A},\vec{B})$ 6- $\bar{u}(A,B)$

<u>Or</u> **أثبت إن المتجهين متعامدان.**

1- $\vec{A} + \vec{B}$

$$\vec{A} + \vec{B} = 3i + (1-1)\,j + (1-1)\,k$$
$$= 3i + 0 \cdot j + 0 \cdot k$$
$$= 3i$$

2- $2\vec{A} - 3\vec{C}$

$2\vec{A} = 2i + 2j + 2k$

$-3\vec{C} = -6i \mp 9j \mp 15k$

$2\vec{A} - 3\vec{C} = -4i - 7j - 13k$

$|2\vec{A} - 3\vec{C}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 13^2} = \sqrt{16 + 49 + 169} = \sqrt{234}$

3- $|\vec{A} \times \vec{B}|$

$$\vec{A} x \vec{B} = \begin{vmatrix} + & - & + \\ i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i(-1+1) - j(-1-2) + k(-1-2)$$

$$= 0 \cdot i + 3j - 3k$$

$$\left|\vec{A}.x\vec{B}\right| = \sqrt{0^2+3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$\theta \frown AxB)$

$$\left|\vec{A}\,x\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| x \left|\vec{B}\right|.Sin\theta$$

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3}\,x\sqrt{6}.Sun\theta$$

$$Sin\theta = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}\,x\sqrt{2}\,x\sqrt{3}} = 1$$

$$Sin\theta = 1$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

الضرب العددي (النقطي) Dot

4- $\vec{A}.\vec{B}$

$$\vec{A} = i + j + k$$

$$\vec{B} = 2i - j - k$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 2 - 1 - 1 = 0$$

5- $\theta(\vec{A}, \vec{B})$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

note
$\pi = 180^\circ$
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$
$2\pi = 360^\circ$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right| x \left|\vec{B}\right|.Cos\theta$$

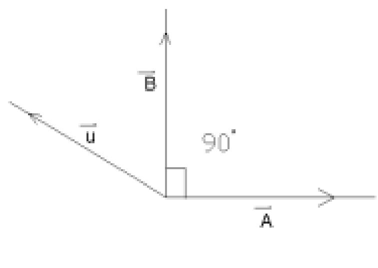
$$0 = \sqrt{3}\ x\ \sqrt{6}.Cos\theta$$

$$\therefore Cos\theta = 0$$

$$\therefore \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

ان المتجهين $\vec{B}, \vec{A}$ متعامدين لأن الزاوية 90°

6- $\vec{u}(\ A,B) = \dfrac{\vec{A}\,x\vec{B}}{\left|\vec{A}\,x\vec{B}\right|}$



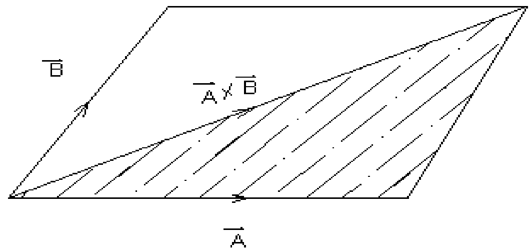
$$\vec{u} = \frac{3j - 3k}{3\sqrt{2}}$$

$$\therefore \vec{u} = \frac{3}{3\sqrt{2}} j - \frac{3}{3\sqrt{2}} k$$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} j - \frac{1}{\sqrt{2}} k$$

✎ **Example:**

أوجد مساحة متوازي الأضلاع ثم مساحة المثلث وقيمة متجه الوحدة العمودي على $\vec{B}, \vec{A}$



$\vec{A} = 2i + j - 2k$
$\vec{B} = i + 3j + 4k$

✭ مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة x الارتفاع

$$\vec{A} x \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} x \vec{B} = i\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= i(4+6) - j(8+2) + k(6-1)$$

$$= 10i - 10j + 5k$$

نجد الطول للمتجه الجديد حتى نتخلص من K,j,I .

$$\left|\vec{A} x \vec{B}\right| = \sqrt{10^2 + 10^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{100 + 100 + 25} = \sqrt{225} = 15$$

∴ مساحة متوازي الأضلاع =15

لإيجاد مساحة المثلث نقسم القيمة على 2

∴ مساحة المثلث $= \frac{15}{2} = 7.5$

$$\vec{u}(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} x \vec{B}}{\left|\vec{A} x \vec{B}\right|}$$

$$= \frac{10i - 10j + 5k}{15} \quad = \frac{10}{15} i - \frac{10}{15} j + \frac{5}{15} k$$

$$\vec{u} = \frac{2}{3} i - \frac{2}{3} j + \frac{1}{3} k$$

✎ **Example:**

$\bar{A} = 3i + j - 2k$

$\bar{B} = -i + 3j + 4k$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع والمثلث

$$\bar{A}\,x\bar{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}\,x\bar{B} &= i\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= i(\ \ 10) - j(\ \ 10) + k(\ \ 10) \\ &= 10i - 10j + 10k \end{aligned}$$

الرسم كما في المثال السابق

$$\begin{aligned} \therefore \left|\bar{A}\ x\bar{B}\right| &= \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} \\ &= \sqrt{100 + 100 + 100} = \sqrt{300} \\ &= \sqrt{3 * 100} = 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

$\therefore$ مساحة متوازي الأضلاع $= 10\sqrt{3}$

مساحة المثلث $= \dfrac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

لإيجاد قيمة الوحدة العمودي $\bar{u}$

$$\bar{u} = \frac{10i - 10j + 10k}{10\sqrt{3}} \quad = \frac{10}{10\sqrt{3}}i - \frac{10}{10\sqrt{3}}j + \frac{10}{10\sqrt{3}}k$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}j + \frac{1}{\sqrt{3}}k$$

✎ **Example:**

$\bar{A} = 3i + 9j + 6k$

$\bar{B} = i + 3j + 2k$

هل إن $\bar{A} \perp \bar{B}$ أو $\bar{A} // \bar{B}$ أثبت ذلك

$\bar{A} \cdot \bar{B} = 3 + 27 + 12 = 42$

$\left|\bar{A}\right| = \sqrt{3^2 + 9^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 81 + 36} = \sqrt{126}$

$\left|\bar{B}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|x|\vec{B}|.Cos\theta$$

$$42=\sqrt{126}\ x\ \sqrt{14}.\ Cos\theta$$

$$\therefore Cos\theta=\frac{42}{\sqrt{126}\ x\ \sqrt{14}}\Rightarrow\theta=Cos^{-1}(\frac{42}{\sqrt{126}\ x\ \sqrt{14}})=Cos^{-1}(\frac{42}{11.2249726x3.74165})$$

$$=Cos^{-1}(\frac{42}{42})=Cos^{-1}(1)=\therefore\theta=0$$

$$\vec{A}x\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}x\vec{B}=i\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=i(18-18)-j(6-6)+k(-9+9)$$

$$=0\cdot i+0\cdot j+0\cdot k$$

$\therefore$ المتجهين متوازيان لان الزاوية الناتجة قيمتها صفر .

$$\therefore\vec{A}x\vec{B}=0$$

$$\Rightarrow Sin\theta=0\Rightarrow\theta=0$$

تمارين تطبيقية :-

جد مساحة متوازي الإضلاع

1- $\vec{A}=3i-2j+k$

$\vec{B}=i-k$

ثم جد قيمة متجه الوحدة

2- **إذا كانت**

$\vec{V}_1=i-k$

$\vec{V}_2=j-k$

أوجد 1- $\vec{V}_1+\vec{V}_2$ 2- $3\vec{V}_2-2\vec{V}_1$ 3- $\vec{V}_1\ x\ \vec{V}_2$ 4- θ 5- $\theta(\vec{V}_1,\vec{V}_2)$ بطريقة الضرب النقطي .

3- $\vec{A}=i+j+k$

$\vec{B}=2i-j-k$

$\vec{C}=2i+3j+5k$

أوجد $\theta(\vec{A},\vec{C}),\ \theta(\vec{B},\vec{C}),\theta(\vec{A},\vec{B})$

باستخدام قانون الضرب ألاتجاهي (الديكارتي العددي)

4- $\vec{A} = 3i - 2j + 4k$
$\vec{B} = 2i - k$
$\vec{C} = -j + k$

أوجد $\vec{A} \cdot \vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{C}$, $(\vec{C} \cdot \vec{B})$, $\theta \frown \vec{A},\vec{B})$, $\vec{A} \times \vec{B}$

5- $\vec{V}_1 = 3i + j - 2k$
$\vec{V}_2 = -i + 3j + 4k$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع ثم مساحة المثلث ثم قيمة متجه الوحدة $\vec{u}$

❁الأعداد المركبة Complex Numbers ❁

لحل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة الدستور ينتج منها عدد مركب

✎ **Example:**

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \qquad a = 1,\ b = -2,\ c = 5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \quad \Rightarrow \text{let } i = \sqrt{-1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2 \pm i4}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 1 \pm 2i$$

$\therefore$ الناتج هو عدد مركب من جزء حقيقي وجزء تخيلي .

✎ **Example:**

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \qquad a = 1,\ b = 2,\ c = 3$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(3)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-2 \pm i2\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = \underbrace{-1}_{\text{Real جزء حقيقي}} \pm \underbrace{\sqrt{2}\, i}_{\text{Img جزء خيالي}} \qquad \Rightarrow Z(-1, \sqrt{2}) \text{ or } Z(-1, -\sqrt{2})$$

∴ العدد المركب Z يعرف بانه زوج مرتب Z(x,y) حيث ان y,x عددان حقيقيان أو يكتب على صورة Z=x+yi

X يسمى الجزء الحقيقي Real part

Y يسمى الجزء الخيالي Img part

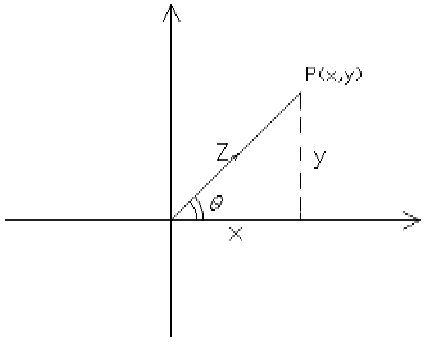
i يسمى بالوحدة الخيالية

حيث أن $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$, $i^3=-\sqrt{-1}$ وهكذا

$$i^4 = i^2 . i^2 = -1 * -1 = 1 \qquad i^5 = i . i^4 = i$$

$$, \; i^6 = -1$$

✎ **Example:**



$$Z = (2,3)$$
$$\therefore Z = 2+3j$$
$$x = R(Z) = 2$$
$$y = Im(Z) = 3$$

لكي نرسم العدد المركب Z نستخرج طول Z

$$|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$|Z| = \sqrt{2^2+3^2}$$
$$|Z| = \sqrt{4+9}$$
$$\therefore |Z| = \sqrt{13}$$

العدد المرافق يعرف $\bar{Z}$:

$$Z = x+yi \rightarrow \bar{Z} = x-yi$$
$$Z_1 = 2+3i \rightarrow \bar{Z}_1 = 2-3i$$

أي عكس أشارة الجزء الخيالي فقط

$$Z_2 = -2+7i \rightarrow \bar{Z}_2 = -2-7i$$

عندما ينتج i^2 نعوض بدلاً منه (1-) عندما يكون لدينا كسر يضرب في مرافق المقام للتخلص من الكسر .

العمليات الجبرية على الأعداد العقدية
1- الجمع 2- الطرح 3- الضرب 4- القسمة 5- إيجاد الطول .

✎ **Example:**

$$\text{if } Z_1 = 1+2i$$
$$Z_2 = 2-i$$

Find 1) $Z_1 + Z_2$ 2) $Z_1 - Z_2$ 3) $|2Z_1 + 3Z_2|$ 4) $Z_1.Z_2$ 5) $\frac{Z_1}{Z_2}$ 6) $\frac{1}{Z_1}$ 7) $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)$

---

1) $Z_1 = 1+2i$
$Z_2 = 2-i$
$\overline{Z_1 + Z_2 = 3+i}$

let $Z_1 = x_1 + iy_1$
$Z_2 = x_2 + iy_2$
$\overline{Z_1 + Z_2} = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

---

2) $Z_1 = 1+2i$
$Z_2 = 2-i$
$\overline{Z_1 - Z_2 = -1+3i}$ $\Rightarrow Z_1 - Z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

---

3) $2Z_1 = 2+4i$
$3Z_2 = 6-3i$
$\overline{2Z_1 + 3Z_2 = 8+i}$
$|2Z_1 + 3Z_2| = \sqrt{8^2+1^2} = \sqrt{65} \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2+y^2}$

---

4) $Z_1.Z_2 = (1+2i)(2-i)$
$= 2 - i + a4i - 2i^2 \quad \rightarrow i^2 = -1$
$= 2 + 3i + 2$
$= 4 + 3ia$

صيغة القانون

$$Z_1.Z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$
$$= x_1.x_2 + ix_1.y_2 + ix_2y_1 + y_1.y_2.i^2$$
$$= x_1.x_2 - y_1.y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$\therefore Z_1.Z_2 = 4+3i \rightarrow \text{Conjugat} \quad \rightarrow \text{Conjugat}\ \overline{Z_1.Z_2} = 4-3i$$

$$5)\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{1+2i}{2-i} \qquad \overline{Z_2}=2+i$$

∴ للتخلص من الكسر نضرب بمرافق المقام .

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(1+2i)}{(2-i)}*\frac{(2+i)}{(2+i)}=\frac{2+4i+i+2i^2}{4-2i+2i-i^2}$$

$$=\frac{2-2+4i+i}{4+1}=\frac{5i}{5}=i$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2}=i \qquad \to Re(Z)=0 \ , \ Im(Z)=1$$

$$6)\frac{1}{Z_1}=\frac{1}{(1+2i)}*\frac{(1-2i)}{(1-2i)}$$

$$=\frac{1-2i}{1+4}=\frac{1-2i}{5}$$

$$\therefore \ \frac{1}{Z_1}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i \qquad \Rightarrow \ Re(Z)=\frac{1}{5} \quad Im(Z)=\frac{-2}{5}$$

$$7)\left(\frac{\overline{Z_1}}{Z_2}\right)=-i$$

صيغة القانون:

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} \qquad if\ Z_2\neq 0$$

$$\overline{Z_2}=x_2-iy_2$$

$$\therefore \ \frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)}*\frac{(x_2-iy_2)}{(x_2-iy_2)}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2.x_1y_2)}{{x_2}^2+{y_2}^2}.$$

تمارين تطبيقية :

1- let $Z_1=2+3i$

$Z_2=4+5i$

Find 1) Z_1+Z_2 2) $|3Z_1-2Z_2|$ 3) $Z_1.Z_2$ 4) $\frac{Z_1}{Z_2}$

2- let $Z_1=5+3i$

$Z_2=-2+7i$

Find 1) Z_1+Z_2 2) $|3Z_1-2Z_2|$ 3) $Z_1.Z_2$ 4) $\frac{Z_1}{Z_2}$

3- Prove that

$$\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}=3-i$$

$$\frac{(5+5i)}{(3-4i)}*\frac{(3+4i)}{(3+4i)}+\frac{20}{(4+3i)}*\frac{(4-3i)}{(4-3i)}$$

$$=\frac{15+20i+15i+20i^2}{9+12i-12i-16i^2}+\frac{80-60i}{16-12i+12i-9i^2}$$

$$=\frac{-5+35i}{25}+\frac{80-60i}{25}$$

$$=\frac{-5+35i+80-60i}{25}=\frac{75-25i}{25}=3-i$$

4- Prove that

$$\frac{(\overline{2+i})^2}{(3-4i)}=1$$

$$\Rightarrow \quad \overline{2+i}=2-i$$

$$\therefore \frac{(2-i)^2}{3-4i}=\frac{(2-i)\ (2-i)}{3-4i}$$

$$=\frac{4-1-2i-2i}{3-4i}$$

$$=\frac{3-4i}{3-4i}=1$$

5- Prove that

$$\frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}=1+i$$

⭐ إذا كان الأسس عدد زوجي فأن النتائج أما -1 أو +1

$$i^{30}=(i^2)^{15}=(-1)^{15}=-1$$

$$i^{100}=(i^2)^{50}=(-1)^{50}=+1$$

⭐⭐ أما إذا كان الأسس عدد فردياً فأن النتائج -i أو +i

$$i^{19}=i.i^{18}=i(i^2)^9=i(-1)^9=-i$$

$$i^{17}=i.i^{16}=i(i^2)^8=i(-1)^8=i$$

$$\Rightarrow\ 3i^{30}-i^{19}=3(-1)-(-i)=-3+i$$

$$\Rightarrow\ \frac{-3+i}{2i-1}=\frac{-3+i}{2i-1}*\frac{(-2i-1)}{(-2i-1)}$$

$$=\frac{6i+3-2i^2-i}{-4i^2-2i+2i+1}=\frac{5i+3+2}{4+1}=\frac{5i+5}{5}$$

$$=\frac{5}{5}(i+1)=1+i$$

6- Prove that :

$$\frac{5i^{19}-i^{100}}{2i^{81}-i^{77}}=-5+i$$

$$i^{19}=i(i^{18})=i(i^{2})^{9}=i(-1)^{9}=-i$$

$$i^{100}=(i^{2})^{50}=(-1)^{50}=1$$

$$i^{81}=i(i)^{80}=i(i^{2})^{40}=i(-1)^{40}=i$$

$$i^{77}=i(i^{2})^{38}=i(-1)^{38}=i$$

$$\therefore\frac{5(-i)-1}{2i-i}=\frac{-5i-1}{i}*\frac{-i}{-i}=\frac{5i^{2}+i}{-i^{2}}$$

$$=\frac{5(-i)+i}{-(-1)}=\frac{-5+i}{1}=-5+i$$

بسط العدد المركب مع كتابة الجزء الحقيقي والجزء التخيلي

✎ **Example:(7)-***Find Re(Z) and Im(Z)*

$$1-Z_{1}=i^{7}-3i^{2}$$
$$Z_{1}=i(i)^{6}-3(-1)$$
$$=i(i^{2})^{3}+3$$
$$=i(-1)^{3}+3$$
$$=-i+3\Rightarrow Re(Z_{1})=3\qquad Im(Z_{1})=-1$$

$$2-Z_{2}=i^{17}$$
$$Z_{2}=i(i^{2})^{8}=i(-1)^{8}=i\Rightarrow Re(Z_{2})=0,\quad Im(Z_{2})=1$$

$$3-Z_{3}=5i^{70}$$
$$Z_{3}=5(i^{2})^{35}=5(-1)^{35}=-5\Rightarrow Re(Z_{3})=-5,\quad Im(Z_{3})=0$$

$$4-Z_{4}=1+i^{15}$$
$$Z_{4}=1+i(i)^{14}=1+i(-i^{2})^{7}=1+i(-1)^{7}=1-i\Rightarrow Re(Z_{4})=1,\quad Im(Z_{4})=-1$$

أثبت أن :
$$\frac{3+4i^{30}}{2+i}=\frac{-2}{5}+\frac{i}{5}$$

⭐صيغ كتابة العدد المركب :

1-**صيغة المحاور المتعامدة أو (الصيغة العامة (Rectangular**

$Z = x + yi$

2-الصيغة المثلثية (Traingular)

$Z = r\{\ Cos\theta + iSin\theta$`

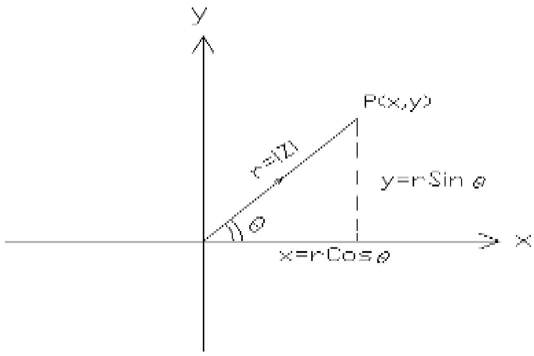
3- الصيغة الأسية (Exponential)

أو صيغة أويلر

$Z = re^{i\theta}$

4- الصيغة القطبية (Polar) $Z = r|\underline{\theta}$

لتحويل العدد المركب الى الصيغة القطبية من الصيغة الجبرية



$r = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$Z = x + iy$

من الشكل اعلاه نلاحظ

$$Cos\,\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \longrightarrow x = r.Cos\,\theta$$

$$Sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \longrightarrow y = r.sin\,\theta$$

$$tan\,\theta = \frac{Sin\,\theta}{Cos\,\theta} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$x = r\,Cos\theta$$

$$y = r\,Sin\vartheta$$

$$\therefore Z = x + iy$$

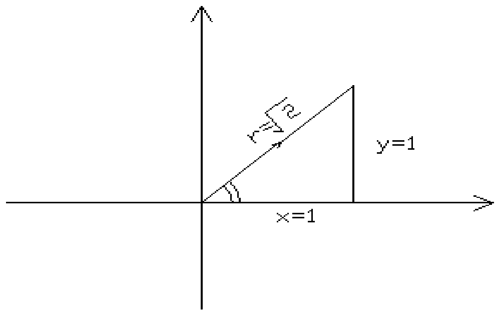
$$Z = rCos\,\theta + irSin\,\theta$$

$= r[Cos\theta + iSin\theta]$ **الصيغة المثلثية**

$Z = re^{i\theta}$ **الصيغة الآسية**

$Z = r|\underline{\theta}$ **الصيغة القطبية**

مثال(1): حول العدد العقدي من الصيغة الجبرية الى القطبية

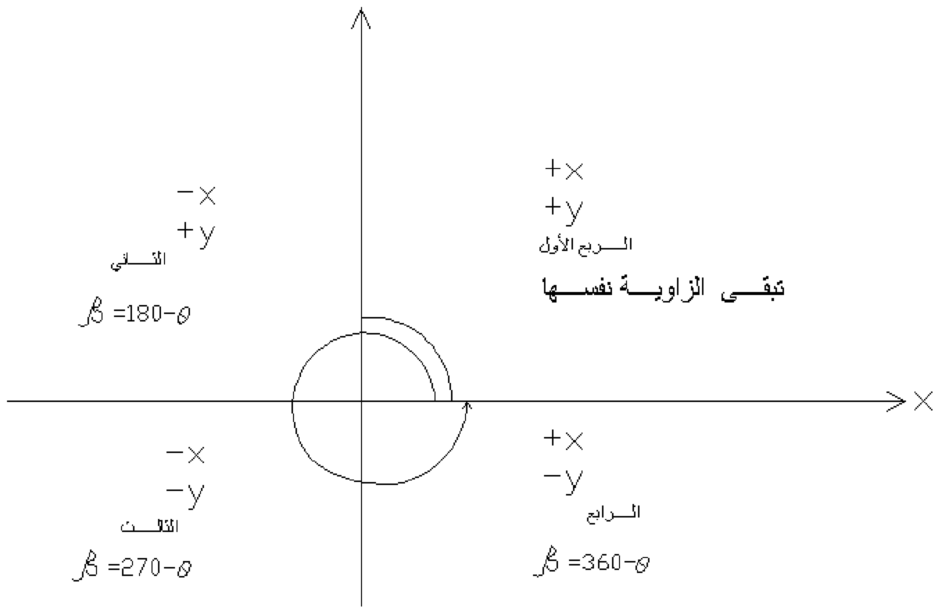


$$Z = 1 + i$$
$$x = 1 \;\; , y = 1$$
$$r = |Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$Cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$\therefore$ **الزاوية تقع في الربع الأول لا تحتاج الى زاوية متممة .**

$$\therefore Z = r(\;Cos\theta + i\,Sin\theta\,)$$

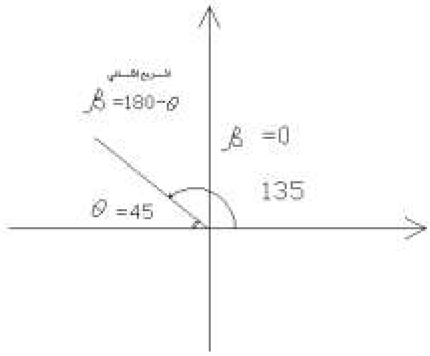
الصيغة المثلثية $= \sqrt{2}(\;Cos45^\circ + i\,Sin45^\circ\,)$



$$Z = re^{i\theta}$$
الاسية $Z = \sqrt{2}e^{i45}$

القطبية $Z = \sqrt{2}\;\underline{|45^\circ}$

☜ <u>مثال (2) :</u>اكتب العدد بالصيغة القطبية و الأسية .



$$Z = -5 + 5i \;\Rightarrow\; x = -5 \;\;, y = 5$$
$$r = |Z| = \sqrt{5^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{50} \;+ \sqrt{25x2} = 5\sqrt{2}$$
$$\tan\theta = \frac{-5}{5} = -1 \qquad \Rightarrow \theta = -45^\circ$$

∴ يجب إيجاد الزاوية المتممة في الربع الثاني .

$$\beta = 180 - \theta$$
$$\beta = 180 - 45 = 135^\circ$$
$$\therefore Z = 5\sqrt{2}(\;Cos135^\circ + i\,Sin135^\circ\,)$$
$$Z = 5\sqrt{2}\,e^{i\,135}$$
$$Z = 5\sqrt{2}\;\;|\underline{135^\circ}$$

☜ <u>مثال (3):</u>حول العدد من الصيغة المثلثية الى الصيغة الجبرية .

$$\therefore Z = 2\sqrt{2}(\;Cos45^\circ + i\,Sin45^\circ\,)$$
$$\Rightarrow\; r = 2\sqrt{2} \qquad \theta = 45^\circ$$

$x = r\,Cos\theta$ | $y = r\,Sin\theta$

$x = 2\sqrt{2}\;Cos45^\circ$ | $y = 2\sqrt{2}\;Sin45^\circ$

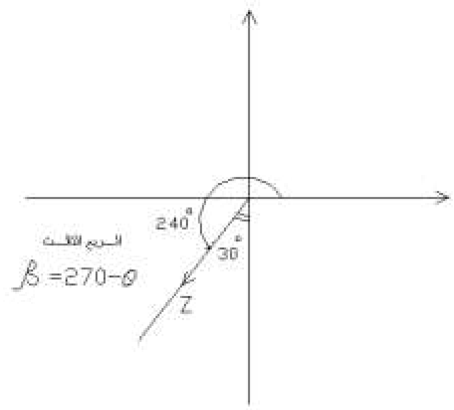
$x = 2\sqrt{2}\;.\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $y = 2\sqrt{2}\;.\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = 2$ | $y = 2$

$$\therefore Z = 2 + 2i$$

المدرس. مها محسن

☜**مثال (4):** اكتب العدد بالصيغة القطبية والأسية .



$$Z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i \;\Rightarrow\; x = -\sqrt{6} \;\; , y = -\sqrt{2}$$

$$r = |Z| = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = \sqrt{4x2} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x\sqrt{3}} \qquad \therefore \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \theta = 30^\circ$$

تقع في الربع الثالث الزاوية المتممة

$$\beta = 270 - \theta$$

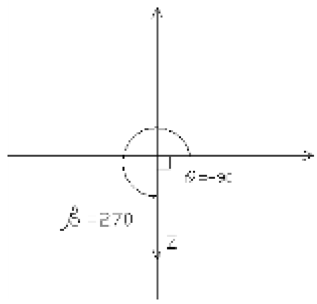
$$\beta = 270 - 30 = 240^\circ$$

$$\therefore Z = 2\sqrt{2}(\ Cos 240^\circ + i\ Sin 240^\circ\ )$$

$$Z = 2\sqrt{2}\ e^{i\,240}$$

$$Z = 2\sqrt{2}\ \ \underline{|240^\circ}$$

☜**مثال (5):** اكتب العدد بالصيغة القطبية .



$$Z = -3i$$

$$\Rightarrow x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad X = +$$

$$y = -3$$

$$r = |Z| = \sqrt{0 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{0} = -\infty \qquad \Rightarrow \theta = -90^\circ$$

العدد يقع في الربع الرابع ∴الزاوية المتممة

$\beta = 360^\circ - \theta$

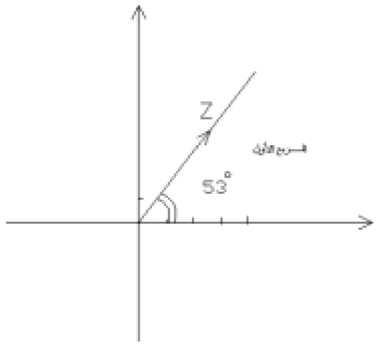
$\beta = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$

$\therefore Z = 3(\; Cos270^\circ + i \; Sin270^\circ)$

$Z = 3e^{i\,270}$

$Z = 3 \quad \underline{|270^\circ}$

☜**<u>مثال (6):</u>**حول العدد إلى الصيغة الآسية .



$Z = 3 + 4i \Rightarrow x = 3$

$\qquad\qquad y = 4$

$r = |Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

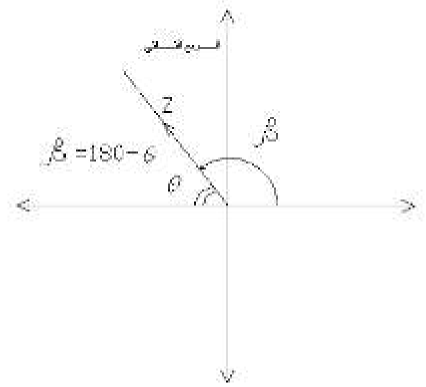
$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{4}{3} \qquad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right) = 53^\circ$

∴ الزاوية تقع في الربع الأول .

$\therefore Z = 5(\; Cos53^\circ + i \; Sin53^\circ)$

$Z = 5e^{i\,53}$

☜**<u>مثال (7) :</u>**حول العدد المركب الى الصيغة القطبية .



$Z = -2 + 2\sqrt{3}i \qquad \Rightarrow x = -2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad y = 2\sqrt{3}$

$|Z| = r = \sqrt{2^2 + 4x3} = \sqrt{16}$

$\therefore r = 4$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

$\therefore \theta = -60^\circ$

$\beta = 180 - 60 = 120^\circ$

$\therefore Z = 4(\; Cos120 + i \; Sin120)$

$Z = 5e^{i\,120} \qquad , Z = 4 \quad \underline{|120^\circ}$

☜مثال (8): حول العدد المركب إلى الصيغة المحاور المتعامدة .

$Z = 4 \ \underline{|120^\circ}$

$r = 4 \quad ,\beta = 120^\circ \quad \Rightarrow y,-x \therefore$

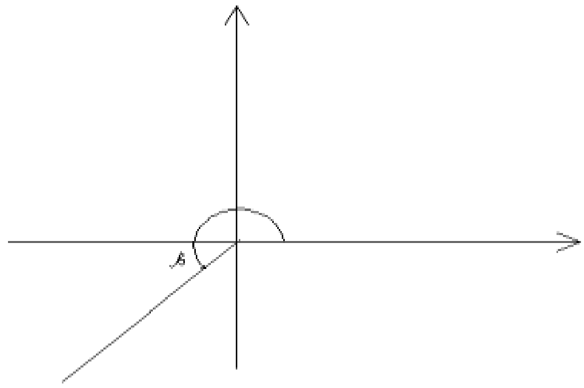
$\theta = 180 - 120 = 60^\circ$

$-x = r\,Cos\theta o \quad \Rightarrow -x = 4\ Cos60 = 4x\frac{1}{2} \quad \therefore x = -2$

$y = r\,Sin\theta i \quad \Rightarrow y = 4\ Sin60 = 4x\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore y = 2\sqrt{3}$

$\therefore Z = -2 + 2\sqrt{3}\ i$

☜مثال (9): حول العدد المركب إلى المحاور المتعامدة إي الصيغة الجبرية .



$Z = 2\sqrt{2}\ \underline{|240^\circ}$

$r = 2\sqrt{2} \quad ,\beta = 240^\circ$

$\therefore$ الزاوية تقع في الربع الثالث . $\Leftarrow \ -y \ ,-x$

$\theta = 270 - 240 = 30^\circ$

$-x = r\ Cos\theta$

$-x = 2\sqrt{2}..Cos30^\circ$

$= 2\sqrt{2}.-.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$

$\therefore x = -\sqrt{6}$

$-y = r\ Sin\theta$

$-y = 2\sqrt{2}..Sin30^\circ$

$= 2\sqrt{2}.-.\frac{1}{2} = \sqrt{2}$

$\therefore y = -\sqrt{2}$

$\Rightarrow Z = -\sqrt{6} - \sqrt{2}\ i$

تمارين تطبيقه

س1) اكتب العدد المركب بالصيغة القطبية

1) $Z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$

2) $Z = -9 + 3i$

3) $Z = \sqrt{2}i + \sqrt{2}$

4) $Z = -\sqrt{3} - \sqrt{2}\,i$

5) $Z = 4i$

6) $Z = \sqrt{2}i$

7) $Z = \sqrt{3+i}$

8) $Z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

س2) حول العدد إلى صيغة المحاور المتعامدة

1) $Z = 2\sqrt{2}\ \underline{|210^\circ}$

2) $Z = 5\ \underline{|35^\circ}$

3) $Z = 2\sqrt{2}\ \underline{|45^\circ}$

4) $Z = 5\sqrt{2}\ \underline{|135^\circ}$

5) $Z = 3\ \underline{|\pi}$

2) $Z = 12e^{\pi/2i}$

3) $Z = 2e^{5\pi/4i}$

4) $Z = 5e^{7\pi/6i}$

♣♣الضرب والقسمة والرفع للإعداد المركبة باستخدام الطرق القطبية والمثلثية :-

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$1-\quad Z_1 Z_2 = r_1.r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

وذلك بضرب الأقواس وتبسيط جبري باستفادة من قوانين النسب المثلثية لحاصل جمع وطرح زاويتين .

$$2-\quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

بشرط إن $Z_2 \neq 0$

※ DeMoiver's Theory نظرية ديموافر ※

$$3-\quad Z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

حيث إن n عدد صحيح موجب ولإيجاد الجذور النونية .

$$4-\quad Z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2K\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2K\pi}{n}\right)$$

حيث إن K= 0,1,2,…………n-1

✎ **Example(1):**

$Z_1 = 3(\ Cos100 + iSin100)$

$Z_2 = \sqrt{5}(\ Cos30 + iSin30)$

Find(1) $Z_1 . Z_2$ (2) Z_1/Z_2 (3) Z_1^{10}

(4) $Z_1^{1/2}$ (5) $Z_2^{1/3}$

$1- \quad Z_1 . Z_2 = 3 * \sqrt{5}(\ Cos(100+30) + iSin(100+30))$

$= 3\sqrt{5}(\ Cos130 + iSin130)$

$2- \quad Z_1 / Z_2 = 3/\sqrt{5}(\ Cos(100-30) + iSin(100-30))$

$= 3/\sqrt{5}(\ Cos70 + iSin70)$

$3- \quad Z_1^{10} = 3^{10}(\ Cos(10*100) + iSin(10*100)\ )$

$= 3^{10}(\ Cos1000 + iSin1000)$

$4- \quad Z_1^{1/2} = 3^{1/2}(Cos\ \frac{100+2K\pi}{2} + iSin\frac{100+2K\pi}{2})$

$n = 2\ ,\ k = 0,1$

(i) $\quad k = 0$

$Z_1^{1/2} = 3^{1/2}(Cos\ \frac{100}{2} + iSin\frac{100}{2})$

$= 3^{1/2}(Cos50\ + iSin50)$

(ii) $\quad k = 1$

$Z_1^{1/2} = 3^{1/2}(Cos\ \frac{100+2\pi}{2} + iSin\frac{100+2\pi}{2})$

$= 3^{1/2}(Cos230\ + iSin230)$

$5- \quad Z_2^{1/3} = (\sqrt{5})^{1/3}(\ Cos\frac{30+2K\pi}{3} + iSin\frac{30+2K\pi}{3})$

$n = 3\ ,\ k = 0,1,2$

(i) $\quad k = 0$

$Z_2^{1/3} = (\sqrt{5})^{1/3}(\ Cos\frac{30}{3} + iSin\frac{30}{3})$

$= (\sqrt{5})^{1/3}(\ Cos10 + iSin10)$

ii) $k=1$

$$Z_2^{1/3}=(\sqrt{5})^{1/3}(\text{Cos}\frac{30+2\pi}{3}+i\text{Sin}\frac{30+2\pi}{3}$$

$$=(\sqrt{5})^{1/3}(\text{Cos}\frac{390}{3}+i\text{Sin}\frac{390}{3})$$

$$=(\sqrt{5})^{1/3}(\text{Cos}130+i\text{Sin}130)$$

iii) $k=2$

$$Z_2^{1/3}=(\sqrt{5})^{1/3}(\text{Cos}\frac{30+4\pi}{3}+i\text{Sin}\frac{30+4\pi}{3}$$

$$=(\sqrt{5})^{1/3}(\text{Cos}\frac{750}{3}+i\text{Sin}\frac{750}{3})$$

$$=(\sqrt{5})^{1/3}(\text{Cos}250+i\text{Sin}250)$$

✎ **Example:(2)**

$Z_1=4(\text{Cos}120+i\text{Sin}120)$

$Z_2=3(\text{Cos}70+i\text{Sin}70)$

$Z_3=5(\text{Cos}90+i\text{Sin}90)$

Find(1)- $Z_1.Z_2$ (2)- $Z_1.Z_3$ (3)- Z_1/Z_2

(4)- Z_1^{100} (5)- Z_3^{40} (6)-$(\frac{Z_1.Z_2}{Z_3})^{30}$

1- $Z_1.Z_2=4*3(\text{Cos}(120+70)+i\text{Sin}(120+70))$

$=12(\text{Cos}190+i\text{Sin}190)$

2- $Z_1.Z_3=4*5(\text{Cos}(120+90)+i\text{Sin}(120+90))$

$=20(\text{Cos}210+i\text{Sin}210)$

3- $\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{4}{3}(\text{Cos}(120-90)+i\text{Sin}(120-90))$

$=\frac{4}{3}(\text{Cos}50+i\text{Sin}50)$

$$4- \quad Z_1^{100}=4^{100}(\cos 100*120+i\sin 100*120)$$
$$=4^{100}(\cos 12000+i\sin 12000)$$

$$5- \quad Z_3^{40}=5^{40}(\cos 40*90+i\sin 40*90)$$
$$=5^{40}(\cos 3600+i\sin 3600)$$

$$6-\left(\frac{Z_1.Z_2}{Z_3}\right)^{30}=\left(\frac{12}{5}\right)^{30}(\cos 30*(190-90)+i\sin 30(190-90))$$
$$=\left(\frac{12}{5}\right)^{30}(\cos 30*100+i\sin 30*100)$$
$$=\left(\frac{12}{5}\right)^{30}(\cos 3000+i\sin 3000)$$

مثال(3): أحسب Z1.Z2 ثم اكتب العدد الناتج بالصيغة الجبرية مع كتابة الجزء الحقيقي والتخيلي

$$Z_1=2(\cos 25+i\sin 25)$$
$$Z_2=5(\cos 110+i\sin 110)$$
$$Z_1.Z_2=2*5(\cos(25+110)+i\sin(25+110))$$
$$Z_1.Z_2=10(\cos 135+i\sin 135)$$

$Z=10\angle 135^0$

r =10 **الزاوية تقع في الربع الثاني**

$$\beta=180-\theta \Rightarrow \theta=180-135=45^\circ$$
$$-x=10*\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad x=-\frac{10}{\sqrt{2}}$$
$$y=10*\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad y=\frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore Z=10\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$Z=5*2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$Z=5\sqrt{2}*\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}i$$
$$\therefore Re(Z)=-5\sqrt{2} \quad ,Im(Z)=5\sqrt{2}$$

☜ **مثال(4): بسط باستخدام الطرق القطبية والمثلثية $(\frac{Z_1}{Z_2})^{10}$ حيث إن**

$$Z_1 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$r_1 = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$r_2 = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\tan\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

الزاوية تقع في الربع الأول

$$\therefore Z_1 = 2(\ Cos\ 60 + iSin60)$$

$$Z_1 = 2\angle 60^\circ$$

$$\tan\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = -60$$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$$\therefore \beta = 360 - 60 = 300$$

$$Z_2 = 2(\ Cos300 + iSin300$$

$$Z_2 = 2\angle 300$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2}{2}(\ Cos(\ 60 - 300) + iSin(\ 60 - 300)\ )$$

$$= (\ Cos(-240) + isin(-240)\ )$$

$$\theta = 360 - 240 = 120^\circ$$

$$\therefore \frac{Z_1}{Z_2} = (\ Cos120 + iSin120)$$

$$(\frac{Z_1}{Z_2})^{10} = (\ Cos10 * 120 + iSin10 * 120)\ )$$

$$= (\ Cos1200 + iSin1200)$$

$$\theta = 120^\circ$$

نطرح من 1200 مضاعفات 350 فتصبح الزاوية مقبولة

$$=(\ Cos120+iSin120)$$

θ تقع في الربع الثاني

$$\therefore \theta = 180-\beta \Rightarrow \theta = 180-120 = 60^\circ$$

$$\therefore -x = 1*\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$y = 1*\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore Z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

مثال(5): إذا كان **Z=1-2i** اوجد $Z^{1/3}$ **حسب نظرية ديموافر.**

$$Z = 1-2i$$

$$r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\tan\theta = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow \theta = 63^\circ$$

العدد يقع في الربع الرابع

$$\Rightarrow \beta = 360-63 = 297$$

$$\therefore Z = \sqrt{5}(\ Cos297+iSin297)$$

$$Z^{1/3} = \sqrt{5}^{1/3}(\ Cos\frac{297+2K\pi}{3}+iSin\frac{297+2K\pi}{3}) \qquad K = 0,1,2$$

مثال(6): العدد Z=3+4i اوجد $Z^{1/4}$.

$$r = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53^\circ$$

العدد يقع في الربع الأول

$$\therefore Z = 5(\ Cos53+iSin53)$$

$$Z^{1/4} = 5^{1/4}(\ Cos\frac{53+2K\pi}{4}+iSin\frac{53+2K\pi}{4}) \qquad k = 0,1,2,3$$

H.W if Z=4-3i , Z=-5+12i Find Z^4 , $Z^{1/4}$

✎Example(7)

$Z_1 = 1+i$

$Z_2 = 1-i$

حسب نظرية ديموافر

Find $1-\quad Z_1 * Z_2 \qquad 2-\quad Z_1/Z_2 \qquad 3-Z_1^3$

$Z_1 = \sqrt{2}(\ Cos45 + iSin45^\circ)$

$Z_2 = \sqrt{2}(\ Cos-45 + iSin-45)$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$\beta = 360 - 45 = 315$

$Z_2 = \sqrt{2}(\ Cos315 + iSin315$

$1- \quad Z_1.Z_2 = \sqrt{2} * \sqrt{2}(\ Cos(\ 45+315) + iSin(\ 45+315)$

$Z_1.Z_2 = 2(\ Cos360 + iSin360^\circ)$

$2- \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} * (Cos(45 \ -315) + iSin(45 \ -315))$

$= (Cos(\ -270) + iSin(-270))$

$= Cos90 + iSin90)$

$3- \quad Z_1^3 = (\ \sqrt{2})^3(\ Cos3*45 + iSin3*45)$

$= 2\sqrt{2}(\ Cos135 + iSin135)$

⁂<u>جذور الأعداد المركبة</u>⁂

$$Z^{1/n} = r^{1/n}(\ Cos(\frac{\theta + 2K\pi}{n}) + iSin(\ \frac{\theta + 2K\pi}{n})\ )$$

☜**مثال(1): جد جميع جذور العدد المركب** $\sqrt[3]{-2i}$.

$Z = 0 - 2i$

$Z^{1/3} = (\ 0-2i)^{1/3}$

$x = 0 \ , y = -2$

$\therefore r = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$

$\tan\theta_2 = \dfrac{-2}{0} = -\infty \Rightarrow \theta = 90^\circ$

الزاوية تقع في الربع الرابع

$\beta = 360 - 90 = 270^\circ$

$\therefore Z = 2(\ Cos270 + iSin270)$

$\therefore Z^{1/3} = 2^{1/3}(\ Cos\dfrac{270 + 2K\pi}{3} + iSin\dfrac{270 + 2K\pi}{3})$

ولإيجاد الجذور نعوض عن K ثلاث مرات K=0,1,2

$Z_1^{1/3} = 2^{1/3}(\ Cos\dfrac{270 + 2*0*\pi}{3} + iSin\dfrac{270 + 2*0*\pi}{3})$

$Z_2^{1/3} = 2^{1/3}(\ Cos\dfrac{270 + 2*1*\pi}{3} + iSin\dfrac{270 + 2*1*\pi}{3})$

$Z_3^{1/3} = 2^{1/3}(\ Cos\dfrac{270 + 2*2*\pi}{3} + iSin\dfrac{270 + 2*2*\pi}{3})$

☜مثال(2): جد الجذور التكعيبية الثلاثة الأولى للعدد المركب .

$Z = \sqrt{6} - \sqrt{2}i$

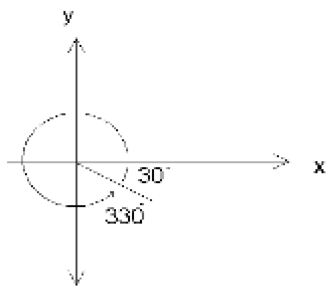
$Z^{1/3} = (\ \sqrt{6} - \sqrt{2}i)^{1/3}$

نحول العدد إلى الصيغة المثلثية والقطبية .

$= \sqrt{\sqrt{6}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{6 + 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\tan\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2} * \sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = 30^\circ$

الزاوية تقع في الربع الرابع



$\beta = 360 - 30 = 330^\circ$

$\therefore Z = 2\sqrt{2}(\ Cos330 + iSin330)$

$\therefore Z^{1/3} = (\ 2\sqrt{2})^{1/3}(\ Cos\dfrac{330 + 2K\pi}{3} + iSin\dfrac{330 + 2K\pi}{3})$

$$Z^{1/3} = (2)^{1/3}(\sqrt{2})^{1/3}(\text{Cos}\ \frac{330+2K\pi}{3} + i\text{Sin}\frac{330+2K\pi}{3})$$

$$(2)^{1/3}(\sqrt{2})^{1/3} = 2^{1/3} * 2^{1/6}$$

$$= 2^{2+1/6}$$

$$= 2^{3/6}$$

$$= 2^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}$$

$$= (2)^{1/3}(2)^{1/6}(\text{Cos}\ \frac{330+2K\pi}{3} + i\text{Sin}\frac{330+2K\pi}{3})$$

$$Z^{1/3} = \sqrt{2}(\text{Cos}\ \frac{330+2K\pi}{3} + i\text{Sin}\frac{330+2K\pi}{3})$$

نعوض عن قيمة K بـ K=0,1,2 لإيجاد الجذور .

$$Z_1^{1/3} = \sqrt{2}(\ \text{Cos}\frac{330}{3} + i\text{Sin}\frac{330}{3})$$

$$= \sqrt{2}(\ \text{Cos}110 + i\text{Sin}110)$$

$$Z_2^{1/3} = \sqrt{2}(\ \text{Cos}\frac{330+2*1\pi}{3} + i\text{Sin}\frac{330+2*1\pi}{3})$$

$$= \sqrt{2}(\ \text{Cos}\frac{330+360}{3} + i\text{Sin}\frac{330+360}{3})$$

$$= \sqrt{2}(\ \text{Cos}\frac{690}{3} + i\text{Sin}\frac{690}{3})$$

$$= \sqrt{2}(\ \text{Cos}230 + i\text{Sin}230)$$

$$Z_3^{1/3} = \sqrt{2}(\text{Cos}\ \frac{330+2*2\pi}{3} + i\text{Sin}\frac{330+2*2\pi}{3})$$

$$= \sqrt{2}(\text{Cos}\ \frac{960}{3} + i\text{Sin}\frac{960}{3})$$

$$Z_2^{1/3} = \sqrt{2}(\ \text{Cos}320 + i\text{Sin}320)$$

الجذر الأول

$$Z_1^{1/3} = \sqrt{2}\angle 110^\circ$$

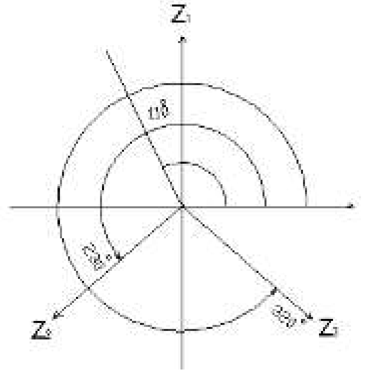
الجذر الثاني

$$Z_2^{1/3} = \sqrt{2}\angle 230^\circ$$

الجذر الثالث

$$Z_3^{1/3} = \sqrt{2}\angle 320^\circ$$

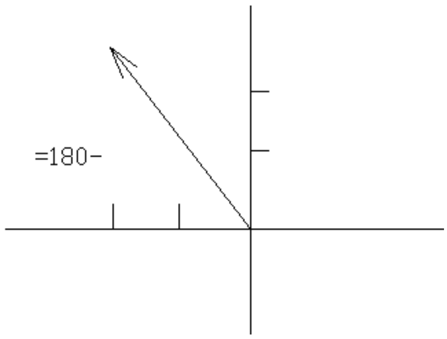
التمثيل الهندسي للجذور .



☜مثال(3): جد الجذور الخمسة إلى العدد المركب

$$Z = -2 + 2i$$
$$x = -2$$
$$y = 2$$

مع التمثيل الهندسي للجذور .



$$r = |Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\therefore \beta = 180 - 45 = 135^\circ$$

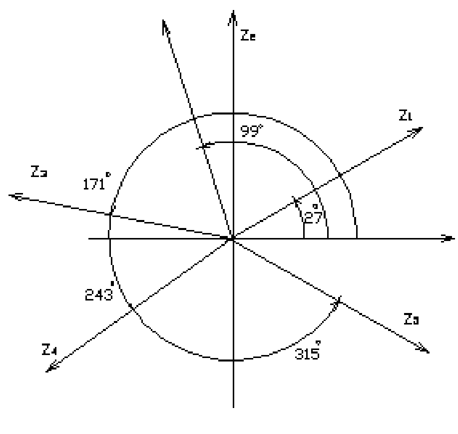
$$\therefore Z = 2\sqrt{2}\,(\ \mathrm{Cos}135 + i\mathrm{Sin}135$$

عدد الجذور n=5

$$\therefore Z^{1/5} = (\ 2\sqrt{2}\,)^{1/5}(\ \mathrm{Cos}\frac{135 + 2K\pi}{5} + i\mathrm{Sin}\frac{135 + 2K\pi}{5}\ )$$

نعوض عن قيمة K بـ K=0,1,2,3,4 .

$$Z_1^{1/5} = 2^{3/10}(\ \mathrm{Cos}\frac{135}{5} + i\mathrm{Sin}\frac{135}{5})$$
$$= 2^{3/10}(\ \mathrm{Cos}27^\circ + i\mathrm{Sin}27^\circ\ )$$



$$Z_2^{1/5} = 2^{3/10}(\,Cos 99^\circ + iSin 99^\circ)$$

$$Z_3^{1/5} = 2^{3/10}(\,Cos 171^\circ + iSin 171^\circ)$$

$$Z_4^{1/5} = 2^{3/10}(\,Cos 243^\circ + iSin 243^\circ)$$

$$Z_5^{1/5} = 2^{3/10}(\,Cos 315^\circ + iSin 315^\circ)$$

$$\therefore Z_1^{1/5} = 2^{3/10}\angle 27^\circ \quad , \quad Z_2^{1/5} = 2^{3/10}\angle 99^\circ \quad , \quad Z_3^{1/5} = 2^{3/10}\angle 171^\circ$$

$$Z_4^{1/5} = 2^{3/10}\angle 243^\circ \quad , \quad Z_5^{1/5} = 2^{3/10}\angle 315^\circ$$

مثال**(4): جد جذور المعادلة** $Z^4 + 4 = 0$ **مع تمثيل الجذور بالرسم .**

$$Z^4 = -4$$

$$Z = (-4)^{1/4}$$

$$x = -4 \;\; , y = 0 \;\; , n = 4 \;\; K = 0,1,2,3$$

$$r = |Z| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$\tan\theta = \frac{0}{-4} = -0 \Rightarrow \theta = 0$$

الزاوية تقع في الربع الثاني

$$\therefore \beta = 180 - 0 \Rightarrow \beta = 180^\circ \;\; \Rightarrow \beta = \pi$$

$$\therefore Z = 4(Cos\,\pi + iSin\,\pi\,)$$

$$\therefore Z^{1/4} = 4^{1/4}(\,Cos\frac{\pi + 2K\pi}{4} + iSin\frac{\pi + 2K\pi}{4})$$

$$K = 0$$

$$\Rightarrow Z_1^{1/4} = \sqrt{2}(\,Cos\frac{\pi}{4} + iSin\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow Z_1 = 1 + i$$

$$K = 1$$

$$\Rightarrow Z_2^{1/4} = \sqrt{2}(\,Cos\frac{\pi + 2\pi}{4} + iSin\frac{\pi + 2\pi}{4})$$

$$\Rightarrow Z_2^{1/4} = \sqrt{2}(\,Cos\frac{3\pi}{4} + iSin\frac{3\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2}(\,Cos 135 + iSin 135)$$

$$Z_2 = -1 + i$$

$K=2$

$$\Rightarrow Z_3^{1/4}=\sqrt{2}\left(\ Cos\frac{\pi+4\pi}{4}+iSin\frac{\pi+4\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Z_3^{1/4}=\sqrt{2}\left(\ Cos\frac{5\pi}{4}+iSin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}(\ Cos225+iSin225)$$

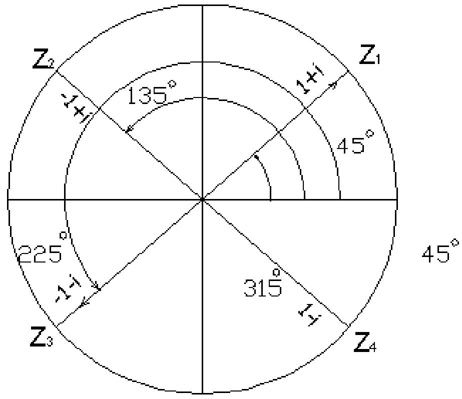
$$Z_3=-1-i$$

$K=3$

$$\Rightarrow Z_4^{1/4}=\sqrt{2}\left(\ Cos\frac{\pi+6\pi}{4}+iSin\frac{\pi+6\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}(\ Cos315^{\circ}+iSin315^{\circ})$$

$$Z_4=1-i$$



تمارين تطبيقية :

باستعمال الإحداثيات القطبية برهن:

$$(-1+j)^7=-8(1+j)$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3=1$$

جد الجذور لكل عدد مركب مع الرسم .

$$1)\ (2i)^{1/2},\quad 2)\ (8)^{1/6},\quad 3)\ (-1)^{1/3},\quad 4)\ \sqrt[4]{-1}$$

جد الجذر الرابع للعدد $-1-\sqrt{3}i$

جد الجذور التكعيبية الثلاثة للعدد $-8i$

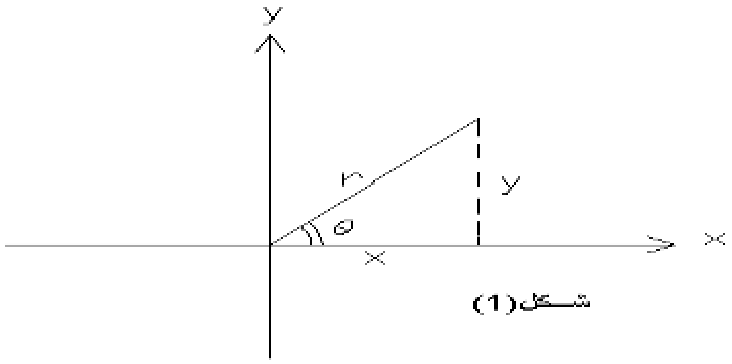
إذا كانت $Z^3=27(1-i)$ **جد قيم** Z .

اوجد الجذرين الرابع والخامس للعدد المركب $Z^5=-32$

برهن إن $\dfrac{(2(Cos\ 15+i\sin 15))^7}{(4(Cos\ 45+i\sin 45))^3}=\sqrt{3}-i$

★مراجعة للدوال المثلثية ★/ ★قوانين الاسس ★/ ★اللوغارتيمات★ :

★ ★النسب المثلثية ★ Trigonometric function ★ ★



شكل(1)

$$Sin\ \ \theta = \frac{y}{r}$$

جـــا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$$Cos\ \ \theta = \frac{x}{r}$$

جتـــا هـ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

$$\tan\ \ \theta = \frac{Sin\ \ \theta}{Cos\ \theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}$$

$$\tan\ \theta = \frac{y}{r} . \frac{r}{x} = \frac{y}{x}$$

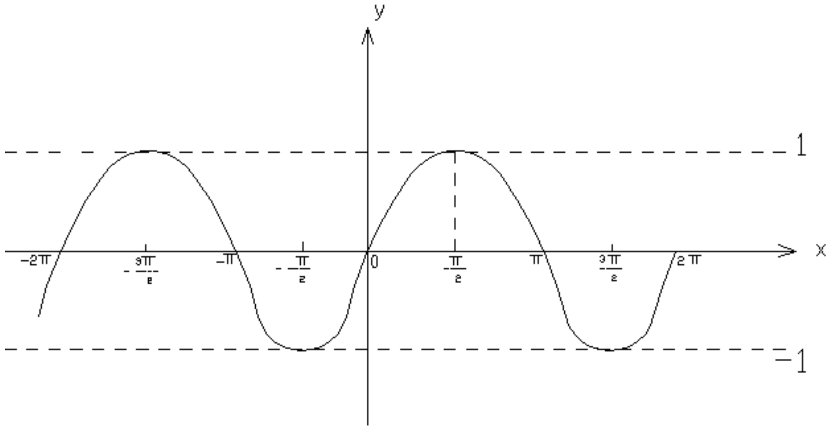
ظـــا هـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

ظتـــا هـ $Cot\ \theta = \frac{1}{\tan\theta} . = \frac{x}{y}$

قتـــا هـ $Csc\ \theta = \frac{1}{Sin\,\theta} .$

قـــا هـ $Sec\ \theta = \frac{1}{Cos\,\theta} .$

رسم دالة $y = Sin\ x$



$-2\pi \le x \le 2\pi$

$-1 \le y \le 1$

$\pi = 180°$

$Sin(0) = 0$

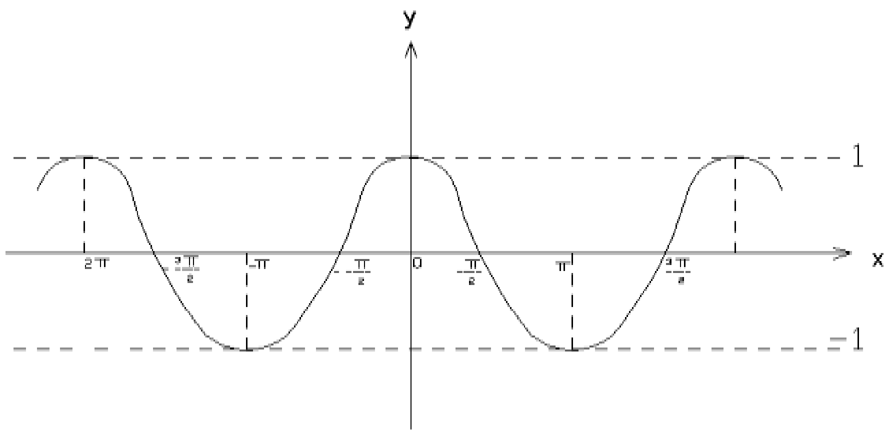
$Sin(\frac{\pi}{2}) = 1$

$Sin\pi = 0$

$Sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$Sin2\pi = 0$

رسم دالة $y = Cos\ x$



$Cos(0) = 1$

$Cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

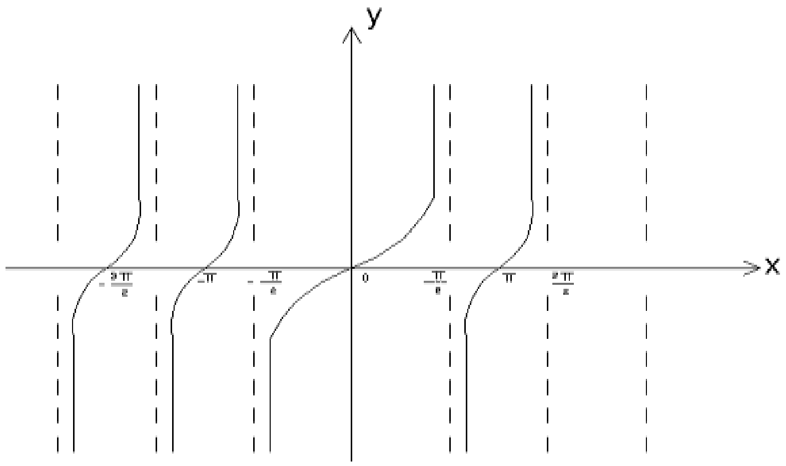
$Cos(\frac{-\pi}{2}) = 0$

$Cos\pi = -1$

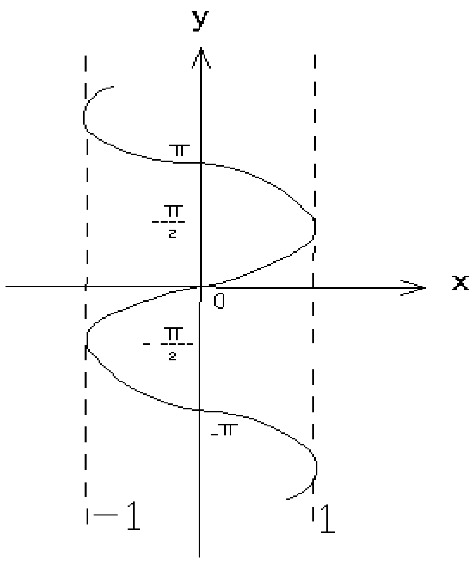
$Cos\frac{3\pi}{2} = 0$

$Cos2\pi = 1$

رسم دالة $y = \tan x$



الدوال المثلثية العكسية تفيد في حل المعادلات التفاضلية ولإيجاد قيم الزوايا



$y = \mathrm{Sin}x$

$x = \mathrm{Sin}^{-1}y$

$x = \mathrm{arc}\,\mathrm{Sin}y$

وكذلك بالنسبة إلى دالة Cos ودالة tan

★جدول لبعض الدوال الخاصة ★

θ	Θ	Sinθ	Cosθ	tanθ
0	$0°$	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	∞
π	$180°$	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	$270°$	-1	0	∞
2π	$360°$	0	1	0
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

❁خواص النسب المثلثية ❁ Properties of triangular function❁

يمكن حساب النسب المثلثية من المثلث القائم الزاوية بتطبيق نظرية فيثاغورس
مربع الوتر = مجموع مربع الضلعين الآخرين
من شكل رقم (1)

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad ....(*)$$

بالقسمة على $r^2 \Leftarrow$

$$\frac{r^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

$$1 = \left(\frac{x^2}{r^2}\right) + \left(\frac{y^2}{r^2}\right)$$

$$1 = Cos^2\theta + Sin^2\theta \qquad ....(1)$$

$$Cos^2\theta + Sin^2\theta = 1$$

المعادلة (*)بالقسمة على x^2

$$\frac{r^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\left(\frac{r}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad \Rightarrow Sec^2\theta = 1 + tan^2\theta \qquad ....(2)$$

بالقسمة على $y^2 \Leftarrow$

$$Cot^2\theta = Csc^2\theta - 1$$

★★★ملاحظة★★ : تحتاج هذه النسب في التفاضل والتكامل (وخاصة في حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية والجزئية .

قوانين ضعف الزاوية :

$1)\ Sin(A+B)=SinA.CosB+SinB.CosA$

$2)\ Sin(A-B)=SinA.CosB-SinB.CosA$

$3)\ Cos(A+B)=CosA.CosB-SinA.SinB$

$4)\ Cos(A-B)=CosA.CosB+SinA.SinB$

$5)\ Cos2\theta=Cos^2\theta-Sin^2\theta$, $\quad 7)\ Sin2\theta=2Sin\theta\cos\theta$

$6)\ Sin2\theta=Sin(\theta+\theta)$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\tan(2\theta)=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

قوانين الاسس :

اذا كان الاساس هو العدد (10) فأن

$(10)^m.(10)^n=10^{m+n}$

$\dfrac{(10)^m}{(10)^n}=10^{m-n} \qquad m\neq n$

$(10^m)^n=10^{m.n}$

$(10^{\circ})=1$

$\sqrt[n]{10^m}=10^{m/n}$

اللوغارتيمات : Log

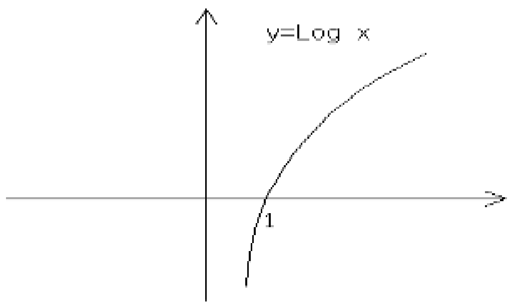
اللوغارتيم : هو قيمة اس الاساس للعدد الاصلي

$8=2^3 \qquad 9=3^2$

$Log_2 8=3 \qquad Log_3 9=2$

ملاحظة : لايوجد لوغارتيم للعدد السالب .

رسم دالة $y=Logx$



❋انواع اللوغارتيمات❋
العشري (الذي أساسه لعدد 10 والطبيعي لاي عدد طبيعي .
لوغاريتم الاساس e.

◊قوانين اللوغاريتمات◊ :

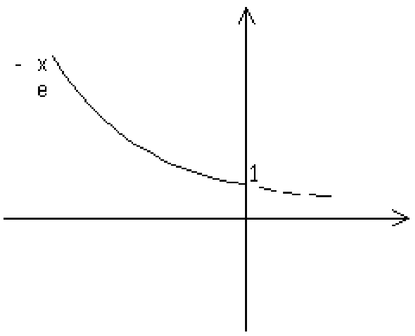
$$Log_A(x.y) = Log_A x - Log_A y$$
$$Log_A(x/y) = Log_A x - Log_A y$$
$$Log_A(x^n) = n Log_A x$$
$$Log_A(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} Log_A x \qquad if\ n \neq 0$$

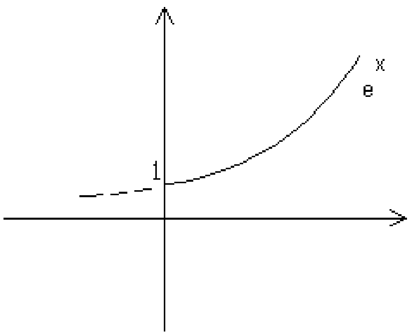
لوغاريتم الاساس e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \qquad .....+\frac{1}{1}\right)$$
$$e = 2.71828 \cong 2.7$$

أي ان e هي معكوس لدالة (Ln)

$Ln\ e = 1$





☀التفاضل والاشتقاق☀

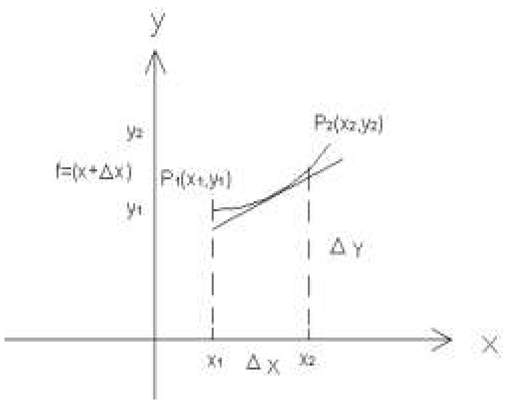
الدالة: هي مجموعة إحداثيات النقاط (x,y) بحيث أن أي تغير يكون في x يحدث في y .

****أنواع الدوال :** Example :✎

الدوال الجبرية	$y = x^2 + 2$
الدوال المثلثية	$y = Sinx + cosx$
الدوال الآسية	$y = e^{x^2}$
الدوال اللوغارتمية	$y = Lnx^2$
الدوال المركبة	$y = x^2 Sinx + e^x$

✱التفاضل (الاشتقاق) :The Derivative

المشتقة : هي ميل المماس لمنحني الدالة أو هو غاية (Limit) معدل التغير لـ y بالنسبة الى المتغير (x) عندما تقترب Δx من الصفر



أيجاد المشتقة :

حسب التعريف

حسب القوانين

قانون أيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف

المشتقة $\boxed{f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{Limit}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \underset{\Delta x \to 0}{Limit}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$-y \quad = -f(x)$$
$$\overline{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)}$$

$$\Delta x \div \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\therefore y'=\left(\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

$$\therefore y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

✎ **Example :(1)**

جد المشتقة حسب التعريف للدالة $y=x$

حسب القوانين

$\mathbf{y=x \quad \Rightarrow y'=1}$

Sol. :

$\mathbf{y=f(x)}$

أجعل

$\mathbf{f(x)=x}$

$\mathbf{f(x+\Delta x)=x+\Delta x}$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=1$$

$\mathbf{y=x^2 \quad \Rightarrow \quad y'=2x}$

$\mathbf{f(x)=x^2}$

$\mathbf{f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2\Delta x.x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=2x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=2x$$

☆☆ملاحظة:

يرمز للمشتقة بـ y' أو $\mathbf{f'(x)}$ أو $\mathbf{\frac{dy}{dx}}$

✎ **<u>Example :(2)</u>**

f(x)= $\sqrt{x}$ جد المشتقة للدالة بطريقة التعريف :

Sol.: القانون:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$ *and* $f(x) = \sqrt{x}$

نعوض في القانون :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

نضرب * مرافق البسط ينتج :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(x+\Delta x)} - \sqrt{x}}{\Delta x} * \frac{\sqrt{(x+\Delta x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{(x+\Delta x)} + \sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

✍ **<u>تمارين تطبيقية</u>**

Find the derivative by definition: **مشتقة الدالة بطريقة التعريف :**

1) $f(x) = \frac{1}{x}$
2) $y = x^2 + 2x + 2$
3) $y = x + 5$
4) $y = x^2 + 8$
5) $y = 2\sqrt{x}$
6) $y = 3\sqrt{x} + 7$

❁❁قوانين مشتقة الدوال الجبرية ❁❁

1) مشتقة الثابت

$$1)\ \frac{d}{dx}(c)=0$$

C= constant

*** أي ان مشتقة الثابت تساوي صفر .**

✎ **Example :(3)**

$y=5$

$\text{sol. } \frac{d}{dx}(5)=0 \Rightarrow y'=0(\ f'(x)\quad y'\ )$

(2

$$2)\ \frac{d}{dx}(x)=1$$

3) مشتقة ثابت * دالة :

$$3)\ \frac{d}{dx}[c\,f(x)]$$

✎ **Example :(4)**

$y=3x^2$

$\text{sol. } y'=6x$

4) مشتقة دالة مرفوعة الى قوى

$$4)\ \frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

Example :(5)

$y=x^3 \qquad \Rightarrow \qquad y'=3x^2$

5) مشتقة جمع او طرح دالتين :

$$5)\ \frac{d}{dx}[f(x)\mp g(x)]=f'(x)\mp g'(x)$$

✎ **Example :(6)**

$y=f(x)=2x^2+4x+5$

$\text{sol. } y'=f'(x)=4x+4$

6) **مشتقة حاصل ضرب دالتين :**

$$6)\ \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)]=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

أي ان مشتقة ضرب دالتين = مشتقة الاول * الثاني + الأول * مشتقة الثاني

✎ **Example :(7)**

جد المشتقة للمقدار التالي

$y = x^2 \sqrt{4-x}$

$sol. \quad y = x^2 (4-x)^{1/2}$

$\frac{dy}{dx} = 2x.(4-x)^{1/2} + x^2 . \frac{1}{2}(4-x)^{-1/2} . -1 \longleftarrow$ (مشتقة –x مشتقة داخل القوس)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x.\sqrt{4-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{4-x}}$

---

7) مشتقة القسمة Division

$$7) \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

*** أي ان مشتقة القسمة تساوي : مشتقة البسط * المقام مطروحاً منه مشتقة المقام * البسط على مربع المقام**

✎ **Example :(8)**

جد مشتقة الدالة

$y = \frac{x^2 - 1}{x}$

$sol. \ y' = \frac{(2x)\ .x - (1)\ (x^2 - 1)}{x^2}$

$= \frac{(2x^2 - x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

$$8) \frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} g'(x)$$

أي ان مشتقة القوس يساوي مشتقة القوس * مشتقة داخل القوس

✎ **Example :(9)**

$f(x) = (x^4 + 2)^3$

$sol. \ f'(x) = 3(x^4 + 2)^2.(4x^3)$

$= 12x^3(x^4 + 2)^2$

✎ **Example :(10)**Find the derivatives for the following functions:

جد المشتقة للدوال التالية :

$1)\ y = x^4 + 3x + 5$

$sol. \quad y' = \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3 + 0$

$\therefore y' = 4x^3 + 3$

$$2)\ y=2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+2x^5$$

sol. $y=2x^{1/2}+(x^2)^{1/3}+2x^5$

$$y=2x^{1/2}+x^{2/3}+2x^5$$

$$\therefore \quad y'=2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}+\frac{2}{3}x^{-1/3}+10x^4$$

$$\therefore \quad y'=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+10x^4$$

$$\frac{2}{3}-1=\frac{2}{3}-\frac{3}{3}=\frac{2-3}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$3)\ y=\sqrt[3]{3x^2}-\frac{1}{\sqrt{5x}}$$

sol. $y=\sqrt[3]{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot x^{-1/2}$

$$y'=\sqrt[3]{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-1/3}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot-\frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$\therefore \quad y'=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$$

$$\frac{2}{3}-1=\frac{2}{3}-\frac{3}{3}=\frac{2-1}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}=\frac{-1-2}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$4)\ y=\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}+\frac{6}{\sqrt{x^3}}$$

sol. $y=3\cdot x^{-\frac{1}{2}}-2\cdot x^{-\frac{2}{3}}+6\cdot x^{-\frac{3}{2}}$

$$\therefore \quad y'=3\cdot-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}-2\cdot-\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{5}{3}}+6\cdot-\frac{3}{2}\cdot x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\therefore \quad y'=-\frac{3}{2\cdot\sqrt{x^3}}+\frac{4}{3\sqrt[3]{x^5}}-\frac{9}{\sqrt[2]{x^5}}$$

$$5)\ s=(t^2-3)^4$$

sol. $V=\frac{ds}{dt}=4(t^2-3)^3\cdot 2t$

$$\therefore \frac{ds}{dt}=8t((t^2-3)^3$$

$a=\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow a:$ التعجيل

التعجيل =a ، السرعة = V ، الزمن =t ، المسافة =S

$6)\ y=\sqrt{x^2+6x-3}$

sol. $y=(x^2+6x-3)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x^2+6x-3)^{-\frac{1}{2}}(2x+6)$ ⟵ مشتقة داخل القوس

$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot 2(x+3)(x^2+6x-3)^{-\frac{1}{2}}$

$=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x-3}}$

*** مشتقة حاصل ضرب دالتين**

$7)\ y=(x^2+2)(2x^3-1)^3$

sol. $\frac{dy}{dx}=(x^2+2)\cdot 3(2x^3-1)^2\cdot 6x^2+(2x^3-1)^3\cdot 2x$

$\therefore y'=18x^2(x^2+2)(2x^3-1)^2+2x(2x^3-1)^3$

مشتقة القسمة

$8)\ Z=\frac{2t-3}{3t^2-1}$

sol. $Z'=\frac{2(3t^2-1)-6t(2t-3)}{(3t^2-1)^2}=\frac{6t^2-2-12t^2+18t}{(3t^2-1)^2}$

$\therefore \quad Z'=\frac{-6t^2+18t-2}{(3t^2-1)^2}$

$9)\ y=\frac{x^2}{\sqrt{4-2x^2}}$

sol. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{4-2x^2}\cdot 2x-x^2\cdot\frac{1}{2}(4-2x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot -4x}{(\sqrt{4-2x^2})^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x\sqrt{4-2x^2}+2x^3(4-2x^2)^{-\frac{1}{2}}}{(4-2x^2)}$

☆☆ملاحظة☆☆ : يمكن حل السؤال اعلاه بطريقة مشتقة حاصل ضرب دالتين :
ترتيب المعادلة كالأتي :

$$y = x^2 (4-2x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot -\frac{1}{2}(4-2x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot -4x + (4-2x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x^3}{\sqrt{(4-2x^2)^3}} + \frac{2x}{\sqrt{4-2x^2}}$$

مشتقة الدالة المركبة (قاعدة السلسلة) Chain Rule :

اذا كانت

$$y = u^2 - 1 \quad ....(1)$$

$$u = 3x^2 - x \quad ....(2)$$

نوجد مشتقة الاول (1)

نوجد مشتقة الثاني (2)ثم نوجد المشتقة $\frac{dy}{dx}$ كالاتي:

قاعدة سلسلة واحدة Chain Rule

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

مشتقة معادلة:-

$$\frac{dy}{du} = 2u \quad ....(1)$$

$$\frac{du}{dx} = 6x - 1 \quad ....(2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2u(6x-1) \quad ....(3)$$

نعوض عن قيمة u من معادلة (2) في معادلة (3) يتبع :

$$y' = 2 \cdot [(3x^2 - x)(6x-1)]$$

$$= 2 \cdot [18x^3 - 3x^2 - 6x^2 + x]$$

$$= 2 \cdot [18x^3 - 9x^2 + x]$$

$$= 36x^3 - 18x^2 + 2x$$

---

2)if: $y = x^2 - 4x$

$x = \sqrt{2t^2+1}$; Find $\frac{dy}{dt}$

sol. $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$y = x^2 - 4x \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 4$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(2\sqrt{2t^2+1} - 4) \cdot 2t}{\sqrt{2t^2+1}}$$

$$x=(2t^2+1)^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \therefore \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(2t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4t$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dt}=(2x-4)\cdot\frac{1}{2}(2t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4t$$

$$\therefore \quad y'=(2x-4)(2t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t$$

---

3) $y=\dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ and $u=\sqrt[3]{x^2+2}$

Find: $\dfrac{dy}{dx}$

sol. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{du}=\frac{(u^2+1)\cdot 2u-(u^2-1)\cdot 2u}{(u^2+1)^2}=\frac{4u}{(u^2+1)^2}$$

$$u=\sqrt[3]{x^2+2}=(x^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(u^2+1)\cdot 2u-(u^2-1)\cdot 2u}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{2}{3}x(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{8}{3}\cdot\frac{u}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}=\frac{8x\sqrt[3]{(x^2+2)}}{3(\sqrt[3]{(x^2+2)^2}+1)^2} * \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$$

---

4) $y=u^3+u$

$u=x^2+2x$

Find $\dfrac{dy}{dx}$

sol. $\dfrac{dy}{du}=3u^2+1$ and $\dfrac{du}{dx}=2x+2$

$$\therefore \cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(3u^2+1)\ (2x+2)$$

$$=(3(x^2+2x)^2+1)\ (2x+2)$$

:تمارين تطبيقية

Find: $\frac{dy}{dx}$

1) $y=\sqrt{2x}-\sqrt{x}$

2) $y=(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$

3) $y=\sqrt{1+\sqrt{x}}$

4) $y=\frac{u-1}{u+1}$ and $x=\sqrt{u}$

5) $y=\left(\frac{x^3-1}{x^2+1}\right)^4$

6) $y=u^3+u$ $\qquad u=x^2+2x$

$\Rightarrow \frac{dy}{du}=3u^2+1 \qquad \Rightarrow \frac{du}{dx}=2x+2$

7) $y=(1+u^2)^3$, $x=u^2$, $x=1$ Ans : sol=12

مشتقة الدالة الضمنية :

هي مشتقة كل متغير ، وكل مشتقة بالنسبة لـ y تكون مضروبة بـ ' y او $\frac{dy}{dx}$

Example:(1) $Find : \frac{dy}{dx}$

تفيد في حل المعادلات التفاضلية

1) $xy^2+x^2y=1$

sol. $x\cdot 2y\cdot y'+y^2\cdot 1+x^2\cdot y'+y\cdot 2x=0$

$(2xy+x^2)\ y'+(y^2+2xy)=0$

$(2xy+x^2)\ y'=-(y^2+2xy)$

$\therefore y'=\frac{-(y^2+2xy)}{(2xy+x^2)}$

✎ **Example :(2)** Find: $\frac{dy}{dx}$, (y')

$$2)\ x^2y-xy^2+x^2+y^2=0$$

$$\text{sol. } x^2\cdot y'+y\cdot 2x-(x\cdot 2y\cdot y'+y^2\cdot 1)+2x+2y.y'=0$$

$$x^2\cdot y'+2xy-2xy\cdot y'-y^2+2x+2y.y'=0$$

$$(x^2-2xy+2y)\,y'=y^2-2xy-2x$$

$$\therefore y'=\frac{(y^2-2xy-2x)}{(x^2-2xy+2y)}$$

✎ **Example :(3)** Find: y' , y''

$$3)\ x^2-xy+y^2=3$$

$$\text{sol. } 2x-(x\cdot y'+y\cdot 1)+2y\cdot y'=0$$

$$y'(2y-x)+(2x-y)=0$$

$$\therefore y'=\frac{-2x+y}{2y-x}$$

$$y''=\frac{(2y-x)(-2+y')-(-2x+y)(2y'-1)}{(2y-x)^2}$$

(H.W) ✍ **تمارين تطبيقية**:

1) $xy^3+x^3y=2$ Find: y' , y''

2) $x^2y^2+5xy+y^2=5$

3) $xy+x^2y^2+x^3y^3+x^2=0$

4) $y^3x^2+x^3y+xy=1$

5) $x^2y^4+x^4\cdot y^2+x^2\cdot y=4$

6) $y=e^{\ln y^2}+y\ln x^2$

7) $\text{Cos}y-\text{Sin}^3x^2-y^3-x^2=6$

8) $\text{Cos}^2y-\dfrac{\sqrt{x}}{2\text{Sin}\sqrt{x}}=\dfrac{1}{y}+\tan^{-1}x$

9) $\tan^3y-y\text{Cos}x=\dfrac{1}{2}\text{Sin}^2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^2}$

10) $2+\ln y=2^{\ln x}+e^{5x}$

❋مشتقة الدوال المثلثية ❋:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x

مشتقة الزاوية u بالنسبة الى x

$$1)\ \frac{d(\mathrm{Sin}u)}{dx}=\mathrm{Cos}u\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$2)\ \frac{d(\mathrm{Cos}u)}{dx}=-\mathrm{Sin}u\cdot\frac{du}{dx}$$

$$3)\ \frac{d(\tan u)}{dx}=\mathrm{Sec}^2u\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$4)\ \frac{d(\mathrm{Cot}u)}{dx}=-\mathrm{Csc}^2u\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$5)\ \frac{d(\mathrm{Sec}u)}{dx}=\mathrm{Sec}u\cdot\tan u\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$6)\ \frac{d(\mathrm{Csc}u)}{dx}=-\mathrm{Csc}u\cdot\mathrm{Cot}u\left(\frac{du}{dx}\right)$$

✎ **Example :(1)**

$y=\mathrm{Sin}(3x)$

$y'=\mathrm{Cos}(3x)\ .3$

$=3\mathrm{Cos}(3x)$

✎ **Example :(2)**

$y=\mathrm{Sin}(4x^2+x)$

$=\mathrm{Cos}(4x^2+x)\ .(8x+1)$

$=(8x+1)(\mathrm{Cos}(4x^2+x))$

✎ **Example :(3)**

$y=\mathrm{Cos}(\sqrt{x})$

$=-\mathrm{Sin}(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}$

$=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\mathrm{Sin}(\sqrt{x})$

✎ **Example :(4)**

$y=\sqrt[3]{\mathrm{Cos}x}$

$y=(\mathrm{Cos}x)^{1/3}$ مشتقة قوس

$y'=\frac{1}{3}(\mathrm{Cos}x)^{-2/3}\cdot-\mathrm{Sin}x\cdot 1$

✎ **Example :(5)**

$y = \tan(x^2)$

$= \sec^2(x^2) \cdot 2x$

$= 2x \cdot \sec^2(x^2)$

✎ **Example :(6)**

$y = \tan(\sqrt{x^2+4})$

$y = \tan((x^2+4)^{1/2})$

$\therefore y' = \sec^2((x^2+4)^{1/2}) \cdot \frac{1}{2}(x^2+4)^{-1/2} \cdot 2x$

$= \frac{x}{(\sqrt{x^2+4})} \cdot \sec^2(\sqrt{x^2+4})$

✎ **Example :(7)**

$y = \sqrt{\tan(\sqrt{x})}$

$y = (\tan(x)^{1/2})^{1/2}$

$\therefore y' = \frac{1}{2}(\tan(x)^{1/2})^{-1/2} \cdot \sec^2(x)^{1/2}) \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}$

$= \frac{\sec^2(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}(\sqrt{\tan\sqrt{x}})}$

✎ **Example :(8)**

$y = \cot(x^2+5x)$

$= -\csc^2(x^2+5x)(2x+5)$

$= -(2x+5) \cdot \csc^2(x^2+5x)$

✎ **Example :(9)**

$y = \cot(\sqrt[3]{x^2+5x+1})$

$y = \cot((x^2+5x+1)^{1/3})$

$= \frac{(-(2x+5) \cdot \csc^2(\sqrt[3]{x^2+5x+1})}{3\sqrt[3]{(x^2+5x+1)^2}}$

✎ **Example :(10)**

$y = \sec(x^3)$

$= \sec(x^3) \cdot \tan(x^3) \cdot 3x^2$

$= 3x^2 \cdot \sec(x^3) \cdot \tan(x^3)$

✎ **Example :(11)**

$$y = Sec(\sqrt{x^3})$$
$$= Sec(x^{3/2})$$
$$\therefore y' = Sec(x^{3/2})\cdot tan(x^{3/2})\cdot \frac{3}{2}(x^{1/2})$$
$$= \frac{3\sqrt{x}}{2}\cdot Sec(\sqrt{x^3})\cdot tan(\sqrt{x^3})$$

✎ **Example :(12)**

$$y = Csc(2x^5)$$
$$\therefore y' = -Csc(2x^5)\cdot Cot(2x^5)\cdot 10x^4$$
$$= -10x^4\cdot Csc(2x^5)\cdot Cot(2x^5)$$

✎ **Example :(13)**

$$y = Sin3x + Cos3x$$
$$= Cos3x\cdot 3 - Sin3x\cdot 3$$
$$= 3(Cos3x - Sin3x)$$

✎ **Example :(14)**

$$y = x^2 Sinx$$
$$= x^2\cdot Cosx\cdot 1 + Sinx\cdot 2x$$

✎ **Example :(15)**

$$y = tan^2(3x^2 - x)$$
$$\therefore y' = 2tan(3x^2 - x)\cdot Sec^2(3x^2 - x)(6x - 1)$$ متشقة داخل الزاوية
$$= (12x - 2)\cdot tan(3x^2 - x)\cdot Sec^2(3x^2 - x)$$

الدالة هي دالة ضمنية

✎ **Example :(16)**

$$y = Sin(x + y)$$
$$\therefore y' = Cos(x + y)(1 + y')$$
$$y' = Cos(x + y) + y'Cos(x + y)$$
$$y' - y'Cos(x + y) = Cos(x + y)$$
$$y' = \frac{Cos(x + y)}{(1 - Cos(x + y))}$$

$$\text{if} \quad \operatorname{Sin}y - \operatorname{Cos}x = 1 \qquad \text{Find } y', y''$$

$$\operatorname{Cos}y.y' + \operatorname{Sin}x.1 = 0$$

$$y' \operatorname{Cos}y = -\operatorname{Sin}x$$

$$\therefore \quad y' = \frac{-\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}y}$$

$$y'' = \frac{\operatorname{Cos}y.-\operatorname{Cos}x + \operatorname{Sin}x.-\operatorname{Sin}y.y'}{(\operatorname{Cos}y)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\operatorname{Cos}y.\operatorname{Cos}x - \operatorname{Sin}x.\operatorname{Sin}y.(\frac{-\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}y})}{(\operatorname{Cos}y)^2}$$

$$\text{if} \quad y = \operatorname{Sin}x + 2\operatorname{Cos}x$$

$$\text{Prove} \quad y''' + y'' + y' + y = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\operatorname{Cos}y.y' + \operatorname{Sin}x.1 = 0$$

$$y' = \operatorname{Cos}x - 2\operatorname{Sin}x$$

$$\therefore \quad y'' = -\operatorname{Sin}x - 2\operatorname{Cos}x \qquad \Rightarrow \text{Sum} = 0$$

$$y''' = -\operatorname{Cos}x + 2\operatorname{Sin}x$$

$$\operatorname{Sin}x + 2\operatorname{Cos}x + \operatorname{Cos}x - 2\operatorname{Sin}x - 2\operatorname{Sin}x - \operatorname{Sin}x - 2\operatorname{Cos}x - \operatorname{Cos}x + 2\operatorname{Sin}x = 0$$

❊الدوال المثلثية العكسية❊

اذا كانت

$x = \operatorname{Sin}y$

then $y = \operatorname{arc}\ \operatorname{Sin}x$

Or $y = \operatorname{Sin}^{-1}x$

وكذلك بالنسبة الى

$y = \operatorname{arc}\operatorname{Cos}x$

$y = \operatorname{Cos}^{-1}x$

:☀:قواعد الاشتقاق:☀:

$$1)\ \frac{d(\ Sin^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2)\ \frac{d(\ Cos^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3)\ \frac{d(\ tan^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4)\ \frac{d(\ Cot^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$5)\ \frac{d(\ Sec^{-1} u)}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$6)\ \frac{d(\ Csc^{-1} u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$$

جميع هذه الاشتقاقات تفيد في طرق التكامل وخاصة بطريقة التعويض

ويمكن برهنتها من خلال $u = Sin\ y$

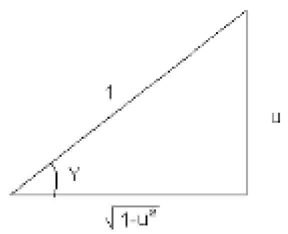
من نظرية فيثاغورس

$[\sin^{-1} u = y\,] *\ \sin u$

$Sin y = \frac{u}{1}$

$\therefore u = Sin y$

$\frac{du}{dx} = Cos y . \frac{dy}{dx}$



$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{Cos y} . \frac{du}{dx}$

$\because Cos y = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} . \frac{du}{dx}$

✎ **Example :(1)**

$y = Sin^{-1} x$

$\therefore y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} . 1$

✎ **Example :(2)**

$$y = Cos^{-1}(2x)$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(2x)^2}}.2$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

✎ **Example :(3)**

$$y = tan^{-1}(3x)$$

$$y' = \frac{1}{1+(3x)^2}.3 = \frac{3}{1+9x^2}$$

✎ **Example :(4)**

$$y = Cot^{-1}(5x)$$

$$\therefore y' = \frac{-1}{1+(5x)^2}.5$$

✎ **Example :(5)**

$$y = Sec^{-1}(4x)$$

$$y' = \frac{1}{4x\sqrt{(4x)^2-1}}.4 = \frac{1}{x\sqrt{16x^2-1}}$$

✎ **Example :(6)**

$$y = Csc^{-1}(4x)$$

$$= \frac{-1}{4x(\sqrt{(4x)^2-1})}\cdot 4 = \frac{-1}{x(\sqrt{16x^2-1})}$$

✎ **Example :(7)**

$$y = arc\ Cos(x^2)$$

$$\therefore y = Cos^{-1}x^2$$

$$\therefore y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}}.2x$$

4- اشتقاق دالة Log

صيغة القانون

(Log)' = $\frac{1}{\quad}$ * مشتقة الدالة

الأساس Ln * الدالة

✎ **Example:**

1− $y = Log_7\, x^3$

$$y' = \frac{1}{x^3.Ln7} * 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3.Ln7} = \frac{3}{x.Ln7}$$

2− $y = Log_5\, \tan x^2$

$$y' = \frac{1}{\tan x^2.Ln5} * Sec^2 x^2 * 2x$$

3− $y = Log_8\, x^4$

$$y' = \frac{1}{x^4 * Ln8} * 4x^3 = \frac{4x^3}{x^4 * Ln8} = \frac{4}{xLn8}$$

4− $y = Log_{10}\, x^7$

$$y' = \frac{1}{x^7.Ln10} * 7x^6 = \frac{7x^6}{x^7.1} = \frac{7}{x}$$

5− $y = Log_2\, X^8$

$$y' = \frac{1}{x^8 * Ln2}.8x^7 = \frac{8x^7}{x^8 * Ln2} = \frac{8}{xLn2}$$

6− $y = Log_e\, x$

$$y' = \frac{1}{x.Lne}.1 = \frac{1}{x}$$

⁂مشتقة الدوال اللوغارتمية والأسية⁂ :

1) $\frac{d}{dx}(Ln u) = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$

2) $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot Ln a \cdot \frac{du}{dx}$

✎ **Example :(1)**

$y = 3^{x^2}$

$\therefore y' = 3^{x^2} \; Ln 3 \; .2x$

$\quad = 2x \, Ln 3 \, . \, 3^{x^2}$

✎ **Example :(2)**

$y = 4^{x^3}$

$y' = 4^{x^3} \; . \; Ln 4 \, .(3x^2)$

✎ **Example :(3)**

$y = 4^{\tan x}$

$y' = 4^{\tan x} \, .Ln 4 \, .Sec^2 x$

✎ **Example :(4)**

$y = Ln(x^2 + 1)$

$\therefore y' = \frac{1}{(x^2 + 1)} .2x$

✎ **Example :(5)**

$y = Ln(Sec\sqrt{x})$

$y' = \frac{1}{Sec\sqrt{x}} .Sec\sqrt{x}.\tan\sqrt{x}.\frac{1}{2} x^{-½}$

✎ **Example :(6)**

$y = e^{x^2}$

$y' = e^{x^2} \; .2x$

✎ **Example :(7)**

$y = Cos x \, .Ln x^2$

$y' = Cos x \, .\frac{1 * 2x}{x^2} - Sin x.Ln X^2$

$\quad = \frac{2}{x} Cos x - Sin x.Ln x^2$

✎**Example :(8)**

$y = e^{\tan x}$

$y' = e^{\tan x}.Sec^2 x$

✎ **Example :(9)**

$y = 7e^{x^3}$

$y' = 7.e^{x^3}.3x^2$

$= 21.x^2.e^{x^3}$

✎ **Example :(10)**

$y = e^{Lnx^2} \qquad = 1^{x^2}$

$= 1^{x^2} \; Ln1.2x = 0$

✎ **Example :(11)**

$y = 7^{x^5}$

$= 7^{x^5}.\; Ln7.\; 5x^4$

✎ **Example :(12)**

$y = Lnx^2 .e^{x^2}$

$= Lnx^2 .\, e^{x^2}.\; 2x + e^{x^2}.\, \frac{1}{x^2}.\; 2x$

☯**Hyparabollar معادلة القطع الناقص**☯

$Sinhx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$Coshx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$Cosh^2 x - Sinh^2 x = 1$

1) $\frac{d(\; Sinhx)}{dx} = Coshx$

2) $\frac{d(\; Coshx)}{dx} = Sinhx$

3) $\frac{d(\; tanhx)}{dx} = Sech^2 x$

4) $\frac{d(\; Cothx)}{dx} = -Csch^2 x$

5) $\frac{d(\; Sechx)}{dx} = -Sechx \cdot tanhx$

---

6) $\frac{d(\text{Csch}\,x)}{dx} = -\text{Csch}\,x \cdot \text{Coth}\,x$

تفيد هذه الاشتقاقات في حل المعادلات التفاضلية وحلولها في المراحل المتقدمة.

Ex (1): show that : $\frac{d}{dx}(\text{Sinh}\,x) = \text{Cosh}\,x$

$$y = \text{Sinh}x = \frac{(e^x - e^{-x})}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} = \text{Cosh}\,x$$

Ex (2): show that : $\frac{d}{dx}(\text{Cosh}\,x) = \text{Sinh}\,x$

$$y = \text{Cosh}x = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})}{2} = \text{Sinh}\,x$$

Ex (3): Find $\frac{dy}{dx}$ **of the folloing function: –**

1. $y = \text{Sinh}(x^2 + 7x + 12)$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Cosh}(x^2 + 7x + 12).(2x + 7)$$

2. $y = \text{Cosh}^6(17 - 4x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = 6\text{Sinh}^5(17 - 4x^2).\text{Cosh}(17 - 4x^2).(-8x)$$

$$= -48x\text{Sinh}^5(17 - 4x^2).\text{Cosh}(17 - 4x^2)$$

3. $y = x^2\text{Sech}\,8x$

$$\frac{dy}{dx} = x^2\text{Sech}\,8x\,\tanh 8x.8 + \text{Sech}8x.2x$$

4. $y = \tanh\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Sech}^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left[\frac{(1-x)-(1+x).(-1)}{(1-x)^2}\right]$$

$$= \text{Sech}^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{2}{(1-x)^2}\right)$$

5. $y = \frac{\sqrt{3}}{x+1}\text{Coth}\,(2x - 1)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{3}}{x+1}\text{Csch}^2(2x + 1).2 + \text{Coth}\,(2x - 1)\frac{-\sqrt{3}}{(x+1)^2}$$

6. $y = \text{Csch}(e^x + \ln(x + 1))$

$$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{Csch}\left(e^x + \ln(x+1)\right).\mathrm{Coth}\left(e^x + \ln(x+ 1)\right).(e^x + \frac{1}{(x+1)})$$

$$\text{Ex (4): Given that } \mathrm{Sinh}x = -\frac{3}{4} \quad \text{, Find Coshx}$$

sol: $\quad$ since $\mathrm{Cosh}^2 x = 1 + \mathrm{Sinh}^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

$$\therefore \mathrm{Cosh}\ x = \pm\frac{5}{4} \quad \text{, we get } \mathrm{Coshx}\frac{5}{4}$$

<u>تمارين تطبيقية :-</u>

$$\text{Exc: } \frac{dy}{dx} \text{ of } y = \sqrt[3]{\mathrm{Sinh}(\cos^{-1}\sqrt{1 - \ln(x + \sin x)}}$$

$$\text{Exc: } \frac{dy}{dx} \text{ of } y = \tanh^4 (x^5 - 5x)^2$$

$$\text{Exc: } \frac{dy}{dx} \text{ of } y = csch(\sqrt{x^3} - x^2)^6$$

$$\text{Exc: } \frac{dy}{dx} \text{ of } y = coth^2\sqrt{1 - x^3}$$

$$\text{Exc: } \frac{dy}{dx} \text{ of } y = sinh(cosh\, x^3)$$

$$\text{Exc: } \frac{dy}{dx} \text{ of } y = \mathrm{sech}\left(6 - 6x^6\right) + coth\left(6 - 6x^6\right)$$

♧تطبيقات التفاضل♧ /♧ رسم الدوال ♧

$f(X)=y$ وهي دالة خطية

1) لرسم الدالة $f(x)=2x$ **وهي دالة خطية**

نعطي قيم الى x لاستخراج قيم المتغير y

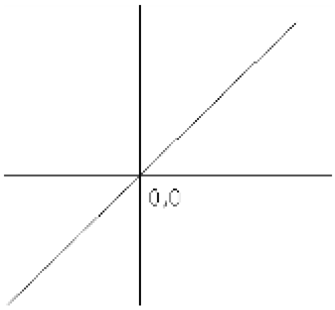
$\boxed{f(x)=2x}$

$\therefore y=2x$

التعويض يكون في الدالة $y=2x$

لاستخراج النقاط حسب الجدول $\Leftarrow$

X	Y
0	0
1	2
2	4
-2	-4
3	6
-3	-6



$y'=2$

$let\ y'=0$

$2\neq 0$

لا توجد نقاط انقلاب للدالة لانها دالة خطية

✎ **Example(1) :**

أرسم الدالة

$f(x)=x^2$

$Sol.\Rightarrow y=x^2$

لإيجاد نقاط الانقلاب (النهايات العظمى والصغرى للمشتقة)

$y=f(x)=x^2$

$f'(x)=2x$

$let f'(x)=0$

$\therefore 0=2x$

$\therefore x=0\Rightarrow y=0$

(0،0)نقطة انقلاب مرشحة

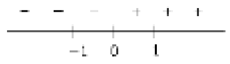
النقطة المرشحة (0،0)

$f'(x)\leftarrow +$**الى – تكون نهاية عظمى**

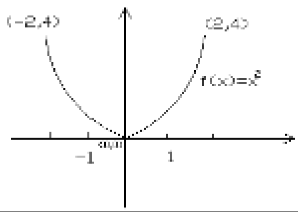
$f'(x)\leftarrow -$**الى + تكون نهاية صغرى**

*** لاتوجد نهاية عظمى او صغرى عندما** $x=x_0$ **اذا لم تتغير اشارتها**

الدالة نهاية نهاية صغرى عند (0،0)



x	y
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4



Example(2) :

x	y
0	0
1	1
1	-1
4	2
4	-2

$X = 4py^2$

$p = 1/4$

$x = y^2$

$\Rightarrow f(y) = y^2$

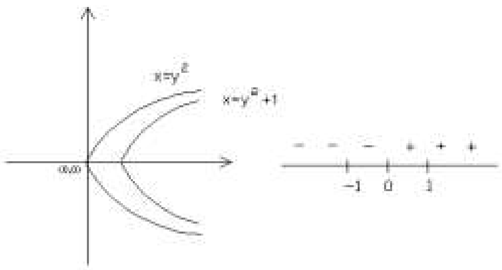
$f'(y) = 2y$

$let f'(y) = 0$

$\Rightarrow 2y = 0$

$\therefore y = 0$

$\therefore x = 0$



هي النقطة المرشحة (0،0)
نعوض في المشتقة

Example(3) :

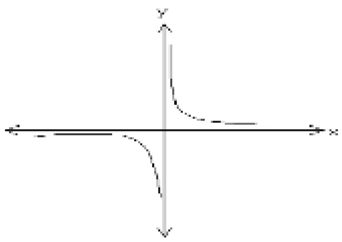
$y = \frac{1}{x}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

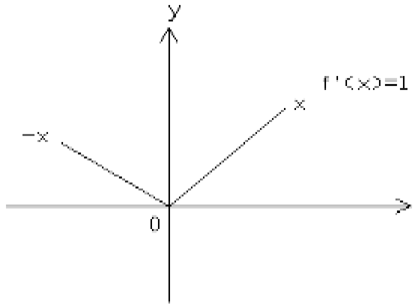
$let f'(x) = 0$

$\therefore -\frac{1}{x^2} = 0$



*عن التعويض عن قيم (x) تكون جميع القيم موجبة ماعدا الصفر يجعل الدالة غير معرفة (∞)
نعمل جدول بالقيم ويكون الرسم بالشكل أعلاه.

✎ **Example(4) :**



$$f(x)=|x|$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x \Rightarrow x>0 \\ -x \Rightarrow x<0 \\ 0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$f'(x)=1$$

∴الدالة زاوية حادة أي لاتحتوي على نقاط انقلاب الدالة تعاني من حالة أنكسار عند (0,0)

*** نعمل جدول لاستخراج قيم (x,y)ثم نرسم الدالة**

✎ **Example(5) :**

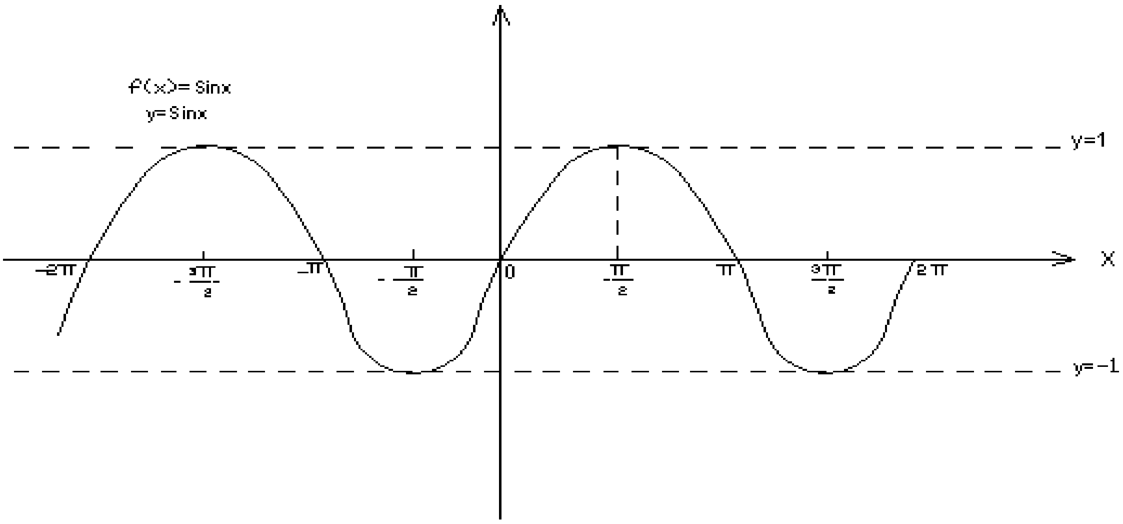
رسم الدوال المثلثية

$y = Sin\,x$

$y = Sin\,x \qquad \pi = 180°$

$\Rightarrow f(x) = Sin\,x \quad -1 \le y \le 1$

$y = 1 \qquad\qquad -2\pi \le x \le 2\pi$



*** اذا تحققت :** $0 \le x \le 2\pi$

***نستخرج قيم** $y = Sinx$ **من الجدول او الحاسبة بحيث ان :**

$\text{Sin}\,\pi/2 = 1$

$\text{Sin}\,0 = 0$

$\text{Sin}\,\pi = 0$

$\text{Sin}\,3\pi/2 = -1$

✎ **Example(6) :**

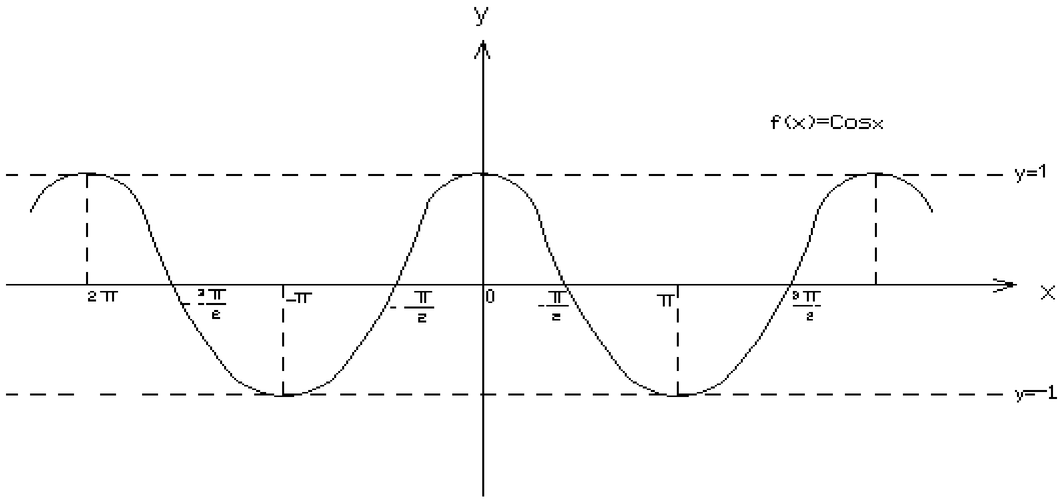
$y = Cosx$

$y = Cosx$

$f(\ x) = Cos$

$0 \le x \le 2\pi$

$-1 \le y \le 1$



*بنفس الطريقة نستخرج قيم $y = Cos\,x$ كالتالي :

$Cos0 = 1$

$Cos\pi/2 = 0$

$Cos(-\pi/2) = 0$

$Cos\pi = -1$

$Cos(-\pi) = -1$

$Cos2\pi = 1$

$Cos(-2\pi = 1$

تمارين تطبيقية:

أوجد تفاضل (اشتقاق) الدوال التالية :

1) $y = Sin(x+y)^2$

2) $tany - Secx = 5$ Find y' , y''

3) $y = -Sec^2x + tanx$ Find $y^{(5)}$

4) $y = arcSin(5x^3)$

5) $y = arcCos(x^2 - 1)^2$

6) $y = tan^{-1}(\frac{x+1}{x+2})$

7) $y = arcSec(\frac{5}{3}x^{\frac{1}{5}})$

8) $y = Cot^{-1}(1-x^3)^2$

9) $y = Csc^{-1}(\sqrt{1-x^3})$

10) $y = e^{2\sqrt{x}}$

11) $y = e^{(x^2-1)^3}$

12) $y = e^{Sinx^3}$

13) $y = Ln(x+1)^3$

14) $y = Ln(4+x)^2$

15) $y = Ln(5x^2+6)^{1/3}$

16) $y = 10^{x^7}$

17) $y = 100^{x^5}$

18) $y = 1^{(x+2)^3}$

19) $y = Sech(7x^3)$

20) $y = Coth(\sqrt[3]{x^2+5})$

21) $y = Log_{100}^{x^7} + Log_{100}^{x^6} - Log_8^{\sqrt{x}}$

22) $y = 8^{x^{20}} + e^{x^{20}} - lnx^{20}$

تمارين تطبيقية:

Q1: Find the derivatives of the following function using the definition

أوجد المشتقة حسب التعريف

1) $y = x^2 - x$

2) $y = \dfrac{3}{5x}$

3) $y = x^2$

4) $y = \sqrt{x+1}$

5) $y = 3x^3$

6) $y = \sqrt{x}$

7) $y = x^2 + 5$

8) $y = \sqrt[3]{x}$

9) $y = x + 7$

10) $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Q2: *Find the derivatives of the following function using the Rule derivatives*

1) $y = x^3$

2) $y = \dfrac{1}{x}$

3) $y = \sqrt{x}$

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2}}$

5) $y = \text{Sinx}$

7) $y = x^4 + 3x^2 - 6$

8) $y = 6x^3 - x^2$

9) $y = \dfrac{x^3}{a+b} + \dfrac{x^2}{a-b} - x$

10) $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{5}$

11) $y = 2ax^3 - \dfrac{x^2}{b_5} + c$

12) $y = x^7 + 3$

13) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

14) $y = \dfrac{(x+1)}{x^2}$

15) $y = \dfrac{x}{m} + \dfrac{n}{x} + \dfrac{x^2}{n^2}$

16) $y = 3\sqrt{x - x^2}$

17) $y = \dfrac{ax^2}{\sqrt[9]{x}}$

18) $y = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$

19) $y = x^2 + x + 1$

20) $y = x^2(x^3 - 1)$

21) $y = (x-2)^5(x+3)^{-4}$

22) $y = \dfrac{(x-2)(x+3)}{x^4}$

23) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

24) $y = (2x^3 - 3x^2 + 6x)^{-6}$

25) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{x}$

26) $y = \dfrac{(x^2 - 1)}{x^2 + x - 2}$

27) $y=(x+2)^2(x+2x)^{-5}$

28) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4$

29) $y=x\sqrt{x^2}+1$

30) $y=Sec^2 5x$

31) $y=tan\sqrt{3x}$

32) $y=Sin(x+1)$

33) $y=Cos(3x+4)$

34) $y=xSinx$

35) $y=tan(5x+1)$

36) $y=Cotx-x^2Secx$

37) $y=\sqrt{2+Cotx}$

38) $y=\sqrt{\frac{1+Cscx}{2}}$

39) $y=\frac{tan^3x}{2}$

40) $y=Cec^2x-tan^2x$

41) $y^3=Sin^2x.y-2Sinx$

42) $y=Sec^4x.tan^4x$

43) $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$

44) $y=\frac{a-x}{a+x}$

45) $y=\frac{t^3}{1+t^2}$

46) $y=2Sinx+Cos3x$

47) $y=tan(ax+b)$

48) $y=Sin^3t.Cost$

49) $y=aSin^3\left(\frac{x}{3}\right)$

50) $y=\frac{tan\left(\frac{x}{2}\right)+Cot\left(\frac{x}{2}\right)}{x}$

51) $y=\frac{tanx-1}{Secx}$

52) $y=Ln\sqrt{\frac{1+Sinx}{1-Sinx}}$

53) $y=Lntan\left(45+\frac{x}{2}\right)$

54) $y=Ln(ax+b)$

55) $y=Ln(x^3-2x+5)$

56) $y=xLnx$

57) $y=Ln^3x$

58) $y=Ln(x+\sqrt{1+x^2})$

59) $y=Ln(Lnx)$

60) $y=e^{Cotx}$

61) $y=x^4.e^{Cscx}$

62) $y=\frac{1+e^x}{e^{2x}-1}$

❀تطبيقات حول المشتقة❀ :

S= المسافة التي يقطعها جسم معين في زمن معين t .

V= السرعة (S')

a = التعجيل (S'')

✎ **Example(1) :**

جسم يسير وفق المعادلة التالية جد السرعة والتعجيل بعد مرور ثانيتين $S=\frac{1}{3}t^3-2t$

Sol. $S'=\frac{1}{3}.3t^2-2$

$S'=t^2-2$

$V(t)=t^2-2$

السرعة $V(2)=(2)^2-2=2\ m/sec$

$S''=2t$

التعجيل $a(t)=2t$

$a(2)=2(2)=4\ m/sec^2$

✎ **Example(2) :**

جسم يسير بخط مستقيم وفق المعادلة التالية $S=t^3-6t^2+9t+4$

جد السرعة والتعجيل عندما t=0

Sol. $S'=3t^2-12t+9$

السرعة $V(t)=3t^3-12t+9$

$V(0)=9$

$S''=6t-12$

التعجيل $a(t)=6t-12$

$a(0)=-12$

✎ **Example(3) :**

جد السرعة والتعجيل لجسم يتحرك وفق المعادلة التالية : $S=t^5+1$

عندما t=2 و t=5

Sol. $S'=5t^4$

$V(t)=5t^5$

$V(2)=5(2)^4=5(16)$

$V(5)=5(5)^4=5(625)m/sec$

$S''=20t^3$

$a(t)=20t^3$

$a(2)=20(2)^3=20(8)$

$a(5)=20(5)^4=20(125)m/sec^2$

المدرس. مها محسن

Example(4) :

جد السرعة والتعجيل لجسم يتحرك وفق المعادلة التالية $S=t^3-4t+6$

عندما t=0 ، ومتى يمكن ان تكون السرعة متزايدة

Sol. $S'=3t^2-4$

$V(t)=3t^2-4$

$V(0)=-4$

$S''=3x2t$

$a(t)=6t$

$a(0)=0$

تكون السرعة متزايدة اجعل V=0

$3t^2-4=0 \quad \Rightarrow t=\pm\sqrt{\frac{4}{3}} \quad \Rightarrow \text{let}\, t_2=+\sqrt{\frac{4}{3}}$

$v(t)=3t^2-4$

$v(\sqrt{\frac{4}{3}})=3(\sqrt{\frac{4}{3}})^2-4$

$=3\frac{4}{3}-4$

$=0$

الجسم مستقر السرعة = صفر ∴ لا تكون السرعة متناقصة وليست متزايدة .

:Integration التكامل

1) التكامل غير المحدد .

2) التكامل المحدد .

أذا كانت f(x) دالة قابلة للاشتقاق ضمن الفترة (a,b) بحيث إن f '(x) هي مشتقتها فأن المضاد لها يسمى التكامل ويرمز له $\int$. $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ ، C يسمى ثابت التكامل

$1)\int dx=x+c$

$2)\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c$

$3)\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$

$4)\int(u+v)dx=\int u\,dx+\int v\,dx$

التكامل توزيعي على الجمع والطرح

$5)\int \frac{1}{u}du=Lnu+c$

$6)\int e^u\,du=e^u+c$

$7)\int a^u du=\frac{a^u}{Lna}+c$

$*\frac{d}{dx}(a^u)=a^u.Lna.\frac{du}{dx}$

✎ **Example :** **Find Integration :-**

$1)\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c$

$2)\int 3x^5dx=3.\frac{x^6}{6}+c$

$3)\int \frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+c$

$4)\int \sqrt[3]{x}\,dx=\int x^{1/3}dx=\frac{x^{4/3}}{4/3}+c$ $\qquad\qquad \frac{1}{3}+1=\frac{1}{3}+\frac{3}{3}=\frac{4}{3}***$

$=3/4\ x^{4/3}+c$

$5)\int(2x^2+5x+3)dx$

$=\int 2x^2dx+\int 5xdx+\int 3\,dx$

$=2\int x^2dx+5\int x\,dx+3\int dx$

$=2\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}+3x+c$

$6)\int(2\sqrt{x}-3x\sqrt{x})dx$

$=2\int x^{1/2}\,dx-3\int x^{3/2}dx$

$=2\frac{x^{3/2}}{3/2}-3\frac{x^{5/2}}{5/2}+C$

تكامل دالة داخل القوس (يجب إن تتوفر مشتقة داخل القوس)

$7)\int(3x+2)^5\,dx$

$=\frac{3}{3}\int(3x+2)^5\,dx$

$=\frac{1}{3}\int(3x+2)^5.3dx$

$=\frac{1}{3}.\frac{(3x+2)^6}{6}+c$

$8)\int\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}dx$

$=\frac{3}{3}\int(x^3+1)^{-1/2}.x^2\,dx$

(مشتقة داخل القوس $3x^2$**)**

$$=\frac{1}{3}\int (x^3+1)^{-\frac{1}{2}}.3x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$9)\int \frac{8x^2dx}{(x^3+2)^3}.=8\int \frac{1}{(x^3+2)^3}.x^2\,dx$$

مشتقة داخل القوس=$(3x^2)$

$$=\frac{8}{3}\int (x^3+2)^{-3}.3x^2dx$$

$$=\frac{8}{3}\left(\frac{(x^3+2)^{-2}}{-2}\right)+C$$

$$10)\int \frac{(x^3+5x^2-4)}{x^2}.dx$$

$$=\int \left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)\,dx$$

$$=\int xdx+\int 5.dx-\int 4x^{-2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}+5x-\frac{4x^{-1}}{-1}+C$$

$$11)\int (3S+4)^2dS$$

$$=\frac{3}{3}\int (3S+4)^2dS=\frac{1}{3}\int (3S+4)^2.3dS$$

$$=\frac{1}{3}*\frac{(3S+4)^3}{3} \qquad or(3S+4)^2=9S^2+24S+16$$

ثم توزيع التكامل

$$12)\int (x^2+1)^4\,dx$$

مشتقة داخل القوس =2x وهي غير متوفرة لذلك يجب ان يحلل القوس

$$(x^2+1)^2(x^2+1)^2$$

$$=(x^4+2x^2+1)\,(x^4+2x^2+1)$$

$$=x^8+2x^6+x^4+2x^6+4x^4+2x^2+x^4+2x^2+1$$

$$=x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1$$

$$\Rightarrow \int (x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1)dx$$

$$=\frac{x^9}{9}+\frac{4x^7}{7}+\frac{6x^5}{5}+\frac{4x^3}{3}+x+c$$

$$13)\int \frac{1}{x}dx = Ln|x| + c$$

$$14)\int \frac{1}{(2x+1)}dx = \frac{2}{2}\int \frac{1}{(2x+1)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)}.2dx = \frac{1}{2}Ln|2x+1| + C$$

$$15)\int \frac{x^2}{(1-2x^3)}dx$$

$$= \frac{-6}{-6}\int \frac{x^2}{(1-2x^3)}dx = \frac{1}{-6}\int \frac{1}{(1-2x^3)}.-6x^2dx$$

$$= \frac{1}{-6}Ln|1-2x^3| + C$$

$$16)\int \frac{Cosx}{Sinx}dx = \int \frac{1}{Sinx}.Cosx\,dx$$

$$= Ln|Sin(x)| + C$$

$$17)\int tanx\,dx = \int \frac{Sinx}{Cosx}.dx$$

$$= -1\int \frac{1}{Cosx}.-Sinx\,dx = -Ln|Cosx| + C$$

$$18)\int e^x dx = e^x + C$$

$$19)\int e^{3x^2}.xdx = \frac{6}{6}\int e^{3x^2}xdx$$

$$= \frac{1}{6}\int e^{3x^2}.6x\,dx = \frac{1}{6}e^{3x^2} + C$$

$$20)\int \frac{e^{1/x}}{x^2}.dx = \int e^{x^{-1}}.x^{-2}dx$$

$$= -1\int e^{x^{-1}}.x^{-2}dx = -e^{-x} + C$$

$$21)\int a^{2x}dx = \frac{2}{2}\int a^{2x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int a^{2x}.2dx = \frac{1}{2}a^{2x}/Lna + C$$

$$22)\int 8^{3x^2}.xdx = \frac{6}{6}\int 8^{3x^2}.xdx$$

$$= \frac{1}{6}\int 8^{3x^2}.6xdx = \frac{1}{6}\frac{8^{3x^2}.}{Ln8} + C$$

$$23)\int 7^{x^5}.x^4\,dx=\frac{5}{5}\int 7^{x^5}.x^4\,dx$$

$$=\frac{1}{5}\int 7^{x^5}.5x^4\,dx=\frac{1}{5}\frac{7^{x^5}.}{Ln7}+C$$

$$24)\int 8^{2x^{1/2}}.x^{-1/2}\,dx$$

$$=\frac{8^{2x^{1/2}}}{Ln8}+C$$

$$25)\int 10^{tanx}.Sec^2x\,dx=\frac{10^{tanx}}{Ln10}+C$$

$$=10^{tanx}+C$$

♥♥تكامل الدوال المثلثية ♥♥

$1)\int Sinx.dx=-Cosx+c$

$2)\int Cosx.dx=Sinx+c$

$3)\int Sec^2x.dx=tanx+c$

$4)\int Csc^2x.dx=-Cotx+c$

$5)\int Secx.tanx.dx=Secx+c$

$6)\int Cscx.Cotx.dx=-Cscx+c$

***ويجب إن تتوفر مشتقة داخل الزاوية دائماً.**

✎ **Example :Find Integration :-**

$$1)\int \sin(5x)\,.dx = \frac{5}{5}\int \sin 5x.dx$$

$$= \frac{1}{5}\int \sin 5x.5dx = \frac{-1}{5}\cos 5x + c$$

$$2)\int x^2.\cos x^3.dx = \frac{3}{3}\int \cos x^3.x^2dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos x^3.3x^2dx = \frac{1}{3}\sin x^3 + c$$

$$3)\int \sin^2 x.\cos x\,dx$$

$$= \int (\sin x)^2.\cos x.dx$$

$$= \frac{(\sin x)^3}{3} + c$$

$$4)\int \tan 5x.\sec 5x\,dx = \frac{5}{5}\int \sec 5x.\tan 5x$$

$$= \frac{1}{5}\int \sec 5x.\tan 5x.5dx = \frac{1}{5}.\sec 5x + c$$

$$5)\int x^2\sec^2(3x^3)\,dx = \frac{9}{9}\int \sec^2(3x^3).x^2dx$$

$$= \frac{1}{9}\int \sec^2(3x^3).9x^2dx$$

$$= \frac{1}{9}\tan(3x^3) + c$$

$$6)\int x\csc^2 x^2.dx = \frac{2}{2}\int \csc^2 x^2.xdx$$

$$= \frac{1}{2}\int \csc^2 x^2.2xdx$$

$$= \frac{1}{2}.-\cot x^2 + c = \frac{-1}{2}\cot x^2 + c$$

$$7)\int x^2\csc(x^3)\,.\cot(x^3)dx$$

$$= \frac{3}{3}\int x^2\csc x^3.\cot x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \csc x^3.\cot x^3\,3x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}.-\csc x^3 + c$$

$$8)\int x(\,Cos5x^2+Sin4x^2)\,.dx$$
$$\int(\,Cos5x^2.x+Sin4x^2.x)\,.dx$$
$$=\frac{1}{10}Cos5x^2 10x.dx+\frac{1}{8}\int Sin4x^2.8x\,dx$$
$$=\frac{1}{10}Sin5x^2-\frac{1}{8}.Cos4x^2+c$$

♣♣التكامل المحدد ♣♣:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\,_a|^b=F(b)-F(a)$$

يفيد هذا التكامل في حساب المساحات والحجوم

$$1)\int_0^5 x.dx=\frac{x^2}{2}\,_0|^5=\frac{5^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{25}{2}$$

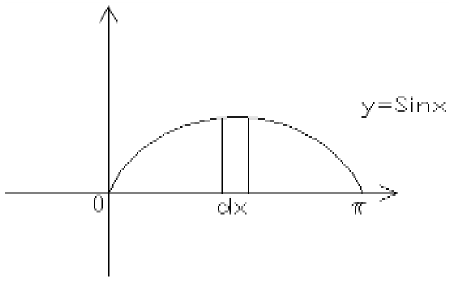
$$2)\int_1^3 x^3.dx=\frac{x^4}{4}\,_1|^3=\frac{(3)^4}{4}-\frac{(1)^4}{4}=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=\frac{80}{4}=20$$

جد المساحة تحت المنحني $y=x^2$ **من** $x=1$ **الى** $x=4$

$$A=\int_1^4 x^2.dx=\frac{x^3}{3}\,_1|^4=\frac{(4)^3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{63}{3}$$

جد المساحة تحت المنحني $y=Sinx$ **من** $x=0$ **الى** $x=\pi$

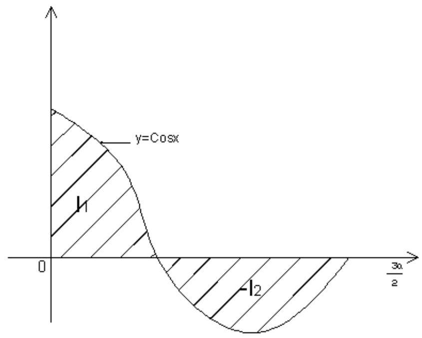
$$A=\int_0^\pi Sinx.dx=-Cosx\,_0|^\pi=-[Cos\pi-Cos0]$$
$$=-[-1-1]=2$$



أوجد المساحة تحت المنحني $y=x^3-6x^2+8x$ **من** $x=0$ **الى** $x=2$

$$A=\int_0^2(\,x^3-6x^2+8x)\,.dx$$
$$=\frac{x^4}{4}-\frac{6x^2}{3}+\frac{8x^2}{2}\,_0|^2=\frac{2^4}{4}-2(2)^3+4(2)^2$$
$$=4\,Sq.Unit$$

4- أحسب التكامل من الشكل التالي :



$$I = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \operatorname{Cos} x \, dx$$

$$= \operatorname{Sin} x \; {}_0/^{\pi/2}$$

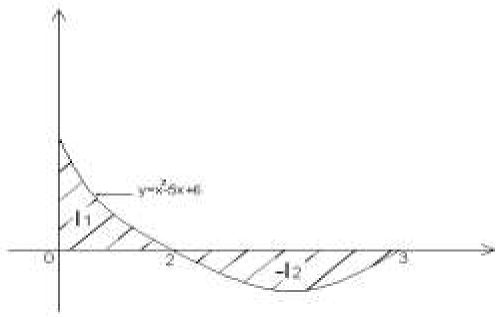
$$= \operatorname{Sin} \frac{\pi}{2} - \operatorname{Sin} 0 = +1 - 0 = 1$$

$$I_2 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \operatorname{Cos} x \, dx = \operatorname{Sin} x \; {}_{\pi/2}/^{3\pi/2} = \operatorname{Sin}\frac{3\pi}{2} - \operatorname{Sin}\frac{\pi}{2} = 1 - (+1) = |-2|$$

$$I_2 = 2$$

$$\therefore I = |1 + 2| = |3| = 3 \text{ unit}^2$$

5- أحسب التكامل من الشكل التالي :



$$I = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int_0^2 (x^2 - 5x + 6) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \; {}_0/^2$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{5 * 2^2}{2} + 6 * 2$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{20}{2} + \frac{12}{1} = \frac{16 - 60 + 72}{6} = \frac{88 - 60}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

$$I_2 = \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \; {}_2/^3$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - \frac{5 * 3^2}{2} + 6 * 3\right) - \frac{28}{6}$$

$$= \left(9 - \frac{45}{2} + 18\right) - \frac{28}{6} = \frac{-1}{6}$$

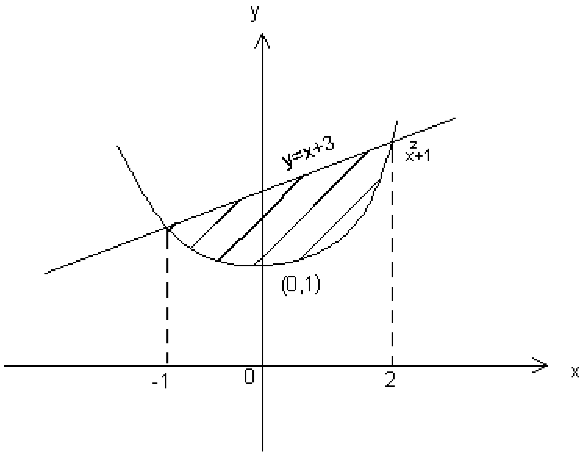
$$I_2 = \frac{28}{6} - \left(27 - \frac{45}{2} - \frac{28}{6}\right)$$

$$I_2 = \frac{28}{6} - 27 + \frac{45}{2} + \frac{28}{6} = \frac{29}{6}$$

$$\therefore I = \frac{14}{3} - \left(\frac{-1}{6}\right) = 9 \text{ Unit}^2$$

6- أحسب التكامل من الشكل التالي :

$$y = x + 3$$
$$y = x^2 + 1$$
$$x^2 + 1 = x + 3$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1)$$
$$x = 2 \quad \text{or} \quad x = -1$$



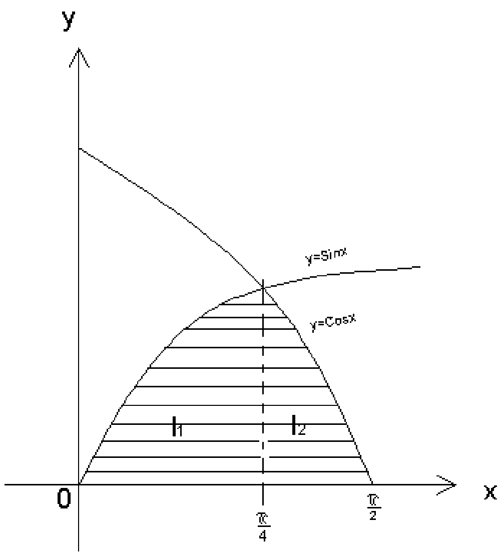
$$I = \int_{-1}^{2} \big((x+3)-(x^2+1)\big)dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x - \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \Big/_{-1}^{2}$$

$$= (2+6) - \left(\frac{8}{3}+2\right) - \left(\frac{1}{2}-3\right) + \left(\frac{-1}{3}-1\right)$$

$$= 4\frac{1}{2} \ \text{unit}^2$$

7- أحسب التكامل من الشكل التالي :



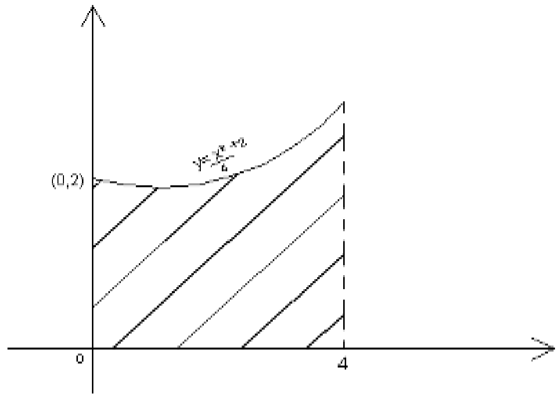
$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \int_{0}^{\pi/4} \text{Sin}x\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \text{Cos}x\,dx$$

$$= -\text{Cos}x_0 \Big/^{\pi/4} + \text{Sin}x \ {}_{\pi/4}\Big/^{\pi/2}$$

$$= -0.7071 + 1 + 1 - 0.7071$$
$$= 2 - 1.4142 = 0.5858 \ \text{Unit}^2$$

8- **أحسب التكامل من الشكل التالي :**



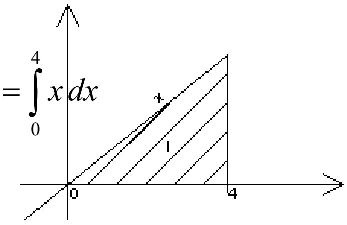
$$I = \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} + 2\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{12} + 2x \;\; {}_0/^4 = 13\frac{1}{3} \;\; Unit$$

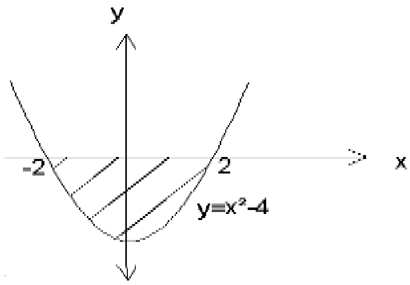
✍**تمارين تطبيقية :**

$I = 8$

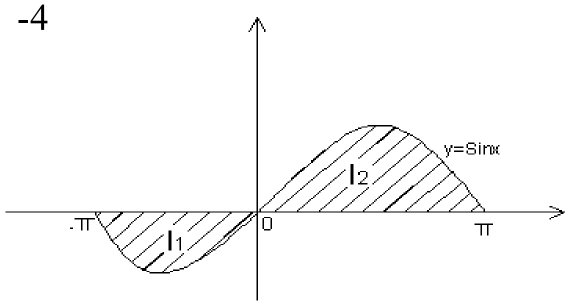
$$I = \int_0^4 x\, dx$$



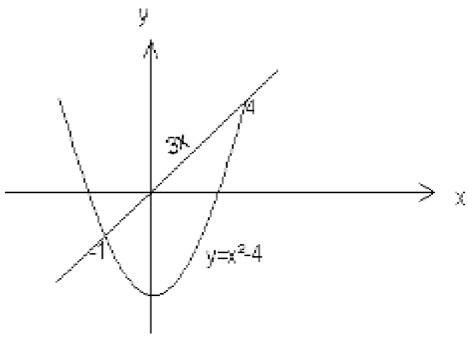
$I = \frac{32}{3}$ -2



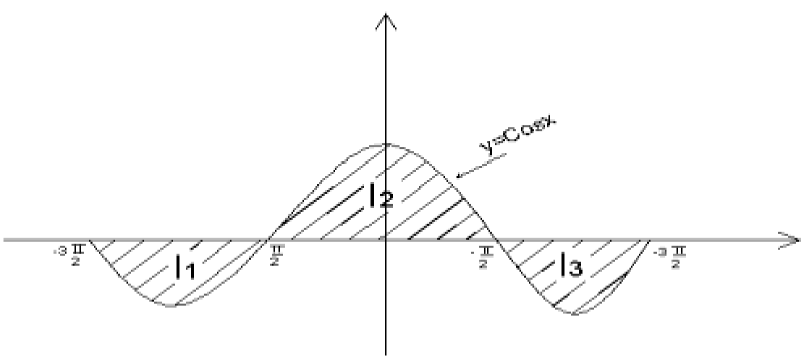
-3



-4



-5



تمارين تطبيقية على التكامل :-

1) $\int_{0}^{\pi/2} (\operatorname{Sin}x - \operatorname{Cos}x)\,dx$

2) $\int_{-3}^{2} (x - 6x^2)\,dx$

3) $\int \frac{\operatorname{Cos}x}{\sqrt{1+\operatorname{Sin}x}}$

4) $\int (1+x^2)^2 . x^2\,dx$

5) $\int (1+x^2)^2 .\,dx$

6) $= \int \frac{dx}{x(2+3\operatorname{Ln}x)^2}$

7) $\int e^{2x}\sqrt{3+e^{2x}}\,dx$

8) $\int \frac{\operatorname{Ln}x}{x}\,dx$

9) $\int \tan 5x . \operatorname{Sec}^4 5x\,dx$

10) $\int \frac{2x}{x^2-3}\,dx$

11) $\int (2+\frac{1}{x})^2\,dx$

12) $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

14) $\int \operatorname{Sec}^2 x . e^{\tan x}\,dx$

15) $\int \frac{6}{x^7}\,dx$

16) $= \int_{1}^{2} (3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

17) $\int_{0}^{1} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

18) $\int_{1}^{5} (25-x^2)^{-1/2} x\,dx$

19) $\int_{0}^{\pi/2n} \operatorname{Cos}nx\,dx$

20) $\int_{0}^{2\pi/w} \operatorname{Sin}wt\,dt$

21) $\int_{2}^{-1} \frac{3x}{1+2x^2}\,dx$

22) $\int_{-1}^{2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}\,dx$

23) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}\,dx}{\sqrt{x}}$

24) $\int \frac{(x-1)}{x^2-2x+3}\,dx$

25) $\int \tan 5x . \operatorname{Sec}^{12} 5x\,dx$

26) $=\int \mathrm{Sin}^3 x\,dx$

Note: $\mathrm{Sin}^2 x = 1-\mathrm{Cos}^2 x$

27) $\int \mathrm{Sec}^2 x . e^{\tan x}\,dx$

28) $\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx$

29) $\int_1^{10} \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx$

30) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}$

31) $\int \left(x^2 - 2x - 1 + \frac{3}{x+2}\right)\,dx$

32) $\int \mathrm{Sin}^{2/5}x\,(1-\mathrm{Sin}^2 x)\,.\mathrm{Cos}x\,dx$

33) $\int \frac{\mathrm{Sin}x}{\mathrm{Cos}^2 x}\,dx$

34) $\int \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{3}\,dx$

35) $\int \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$

36) $\int \frac{1}{\mathrm{Cos}^2 \frac{x}{3}}\,dx$

37) $\int 100^{x^{100}} . x^{99}\,dx$

38) $\int \frac{x}{9-x^2}\,dx$

39) $\int_0^{\pi/4} (\mathrm{Cos}x - \mathrm{Sin}x)\,dx = \sqrt{2}-1 = 0.4$

40) $\int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}$

41) $\int \csc x . \cos x\,dx$

42) $\int \sec x . \sin x\,dx$

43) $\int \frac{dx}{e^{x+1}} = \ln\left|1+e^{-x}\right| + c$

44) $\int_0^{10} \frac{dx}{(9-x)}$

45) $\int 8^{3x^2} . 6x\,dx$

46) $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}\,dx$

47) $\int (x^3+3)^4\,dx$

48) $\int \frac{x^2}{(1-2x^3)}\,dx$

49) $\int \mathrm{Sin}^{10} 2x^2 . x\mathrm{Cos}2x^2\,dx$

50) $\int_0^1 8^{2\sqrt{x}} / \sqrt{x}\,dx$

❄❄طرق التكامل❄❄ :

التكامل بطريقة التجزئة

أذا كانت v,u دالتين قابلتين للاشتقاق فأن :

$$d(uv)=u.dv+v.du$$

$$\int d(uv)=\int u.dv+\int v.du$$

$$uv=\int u.dv+\int v.du$$

$\boxed{\int u.dv=uv-\int v.du}$ Py - Bart

$$1)\int \underset{u}{x}\,\underset{dv}{Sinx}\,dx$$

$$\text{let } u=x \Rightarrow du=dx$$

$$dv=Sinxdx \Rightarrow \int dv=\int Sinx\,dx$$

$$v=-Cosx \qquad \boxed{\int u.dv=uv-\int v.du}$$

$$\therefore \int x.Sinx\,dx=x.-Cosx-\int -Cosx\,dx$$

$$=Cosx+\int Cosx\,dx$$

$$=-x.Cosx+Sinx+c$$

$2)\int \underset{u}{x}\,\underset{dv}{e^x}\,dx \quad ,3)\int x^2.e^x dx$ 3) H.W

$$x=u \Rightarrow dx=du \qquad ....(1)$$

$$e^x dx=dv \Rightarrow v=e^x \qquad ....(2)$$

$$\int u.dv=uv-\int v.du$$

$$\int xe^x dx=x.e^x-\int e^x.dx$$

$$=xe^x-e^x+c$$

$$4)\int x.Lnxdx=\int \frac{Lnx}{u}.\frac{xdx}{dv}$$

$$u=Lnx \quad \Rightarrow \quad du=\frac{1}{x}.dx$$

$$dv=xdx \quad \Rightarrow \quad v=\frac{x^2}{2}$$

$$\int xLnxdx=Lnx.\frac{x^2}{2}-\int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}$$

$$=Lnx.\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}.\frac{x^2}{2}+c$$

$$=Lnx\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}+c$$

:تجزئة الكسور

عندما تكون مشتقة المقام غير متوفرة

يحلل المقام إلى أقواس

نجزء الكسر ثم نحدد المجاهيل

$$1)\int \frac{dx}{(x^2-9)} = \int \frac{dx}{(x-3)(x+3)}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x-3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$1 = Ax + 3A + Bx - 3B$$

$$A + B = 0 \quad \Rightarrow A = -B$$

$$3A - 3B = 1$$

$$-3B - 3B = 1 \Rightarrow -6B = 1 \ \Rightarrow B = -\frac{1}{6} \quad \therefore A = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2-9)} = \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{6}\int \frac{1}{(x+3)}$$

$$= \frac{1}{6}Ln|x-3| - \frac{1}{6}Ln|x+3| + c$$

$$2)\int \frac{1}{(x^2-4)}.dx = \int \frac{1}{(x-2)(x+2)}.dx$$

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$= \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$Ax + 2A + Bx - 2B = 1$$

$$A + B = 0 \quad ....(1) \ \ * -2$$

$$3A - 2B = 1 \quad ....(2)$$

$$-2A - 2B = 0$$

$$2A - 2B = 1$$

$$-4B = 1$$

$$\therefore B = -\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \ A = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2-4)} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+2)}$$

$$= \frac{1}{4}Ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$$

صيغة الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$

1- اذا كانت g(x) دالة خطية (من الدرجة الاولى غير مكررة x+b

$$1)\ \frac{1}{(x+7)(x-2)}=\frac{A}{(x+7)}+\frac{B}{(x-2)}$$

2- اذا كانت g(x) دالة خطية مكررة

$$2)\ \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x-1)}$$

3- اذا كانت g(x) دالة من الدرجة الثانية غير مكررة

$$3)\ \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+c}{(x^2+2)}$$

$$4)\ \frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{(x^2+1)}$$

4- اذا كانت g(x) دالة من الدرجة الأولى وغير مكررة

$$5)\ \frac{x^3-5x+1}{(x+2)} \qquad \Rightarrow \qquad x^2-2x-1+\frac{3}{x+2}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x-1 \\ \hline x+2 & x^3-5x+1 \\ & x^3 \mp 2x^2 \\ \cline{2-2} & -2x^2-5x+1 \\ & \pm 2x^2 \pm 4x \\ \cline{2-2} & -x \quad +1 \\ & \pm x \quad \pm 2 \\ \cline{2-2} & \qquad 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int\frac{x^3-5x+1}{(x+2)}.dx=\int(x^2-2x-1)\ .dx+\int\frac{3}{x+2}dx$$

$$\frac{-x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}-x+3Ln|x+2|+c$$

$$\int\frac{2x+41}{x^2+5x-14}.dx$$

$$x^2+5x-14=(x+7)(x-2)$$

$$\frac{2x+41}{(x+7)(x-2)}=\frac{A}{(x+7)}+\frac{B}{(x-2)}$$

$$=\frac{A(x-2)+B(x+7)}{(x+7)(x-2)}$$

$\Rightarrow Ax-2A+Bx+7x=2x+41$

$A+B=2 \quad \Rightarrow \quad A=2-B$

$-2A+7B=41$

$-2(2-B)+7B=41$

$\Rightarrow 9B=45$

$\therefore B=\frac{45}{9}=5 \quad \Rightarrow \quad A=2-3=-3$

$$\int\frac{2x+41}{x^2+5x-14}.dx=\int\frac{-3}{(x+7)}.dx+\int\frac{5}{(x-2)}.dx$$

$=-3Ln|x+7|+5Ln|x-2|+c$

$$\int\frac{4x-3}{6x^2-x-12}.dx$$

$$\frac{4x-3}{(3x-4)(2x-3)}=\frac{A}{(3x-4)}+\frac{B}{(2x-3)}$$

$\Rightarrow A=\frac{25}{17}, \quad B=\frac{6}{17}$

$$\int\frac{4x-3}{6x^2-x-12}.dx=\int\frac{25/17}{(3x-4)}.dx+\int\frac{6/17}{(2x-3)}.dx$$

$=25/17 * 3Ln|3x-4| + 6/17 * 2Ln|2x-3|$

2- اذا كانت g(x) دالة خطية مكررة

$c=5/4$

$B=-5/2$

$A=-5/4$

$$\int\frac{5x\,dx}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x-1)}$$

$$\int\frac{5\,dx}{(x+1)^2(x-1)}=\int\frac{-5/4}{(x+1)}.dx+\int\frac{-5/4}{(x+1)^2}.dx+\int\frac{5/4}{(x-1)}$$

$$=\frac{-5}{4}Ln|x+1|-\frac{5}{2}\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+\frac{5}{4}Ln|x-1|+c$$

اذا كانت g(x) دالة خطية من الدرجة الثانية وغير مكررة

$$\int \frac{3x^3+1}{x(x^2+1)}dx = \frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow A=1 \quad , \quad B=2 \quad , \quad c=0$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2x}{(x^2+1)}dx$$

$$= Ln|x| + Ln|x^2+1| + c$$

$$\int \frac{4x^2+3}{(x+1)(x^2+2)}dx = \frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+c}{(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow A = 4/3 \quad ,B = 7/3 \quad ,c = 1/3$$

$$\int \frac{4/3}{x+1}dx + \int \frac{7/3\,x + 1/3}{(x^2+2)}dx$$

$$= 4/3\; Ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{7x+1}{(x^2+2)}dx$$

$$= 4/3\; Ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \left[\frac{7x}{(x^2+2)}+\frac{1}{(x^2+2)}\right]dx$$

$$\int \frac{7x}{(x^2+2)} = 7/2 \int \frac{2x}{x^2+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2}dx$$

$$= \frac{7}{2}\; Ln|x^2+2| + c$$

☻☻حل المعادلات التفاضلية☻☻ :

* طريقة فصل المتغيرات

يمكن حل المعادلة التفاضلية في حالة امكانية جمع كل حدود y مع dy وكل حدود x مع dx أي انه اذا كتبت المعادلة:

$$f(y)\,.dy + g(x)\,.dx = 0$$

فان الحل العام

$$\int f(y)\,.dy + \int g(x)\,.dx = c$$

✎ **Example (1):**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x$$

$$\int dy = \int\left(\frac{1}{x^2} + x\right)dx$$

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$$

✎ **Example (2):**

$$\frac{dy}{dx} = (xy)^{1/2} \qquad x > 0\,, y > 0$$

$$dy = (xy)^{1/2}\;dx$$

$$\int \frac{dy}{(y)^{1/2}} = \int (x)^{1/2}\;.dx$$

$$2\sqrt{y} = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{3}x^{3/2} + 2c$$

$$y = \left(\frac{1}{3}x^{3/2} + 2c\right)^2$$

✎ **Example (3):**

$$\frac{dy}{dx} = 20y^2(4x^2 + 4x^{-2}) \quad x > 0\;\,, y > 0$$

$$\int \frac{dy}{20y^2} = \int (4x^2 + 4x^{-2})\;.dx$$

$$\frac{-1}{20}y = \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{x} + c$$

$$y = \frac{-80}{3} + \frac{80}{x} + c$$

Example: (4)

$$\frac{dy}{dx}=(2x+1)^3$$

$$\int dy=\int(2x+1)^3 \, . \, dx$$

$$\int dy=\frac{1}{2}\int(2x+1)^3 .2\, dx$$

$$y=\tfrac{1}{8}(2x+1)^4+c$$

✎ **Example: (5)**

$$\frac{dy}{dx}=2xy^2$$

$$\frac{dy}{y^2}=2x.dx$$

$$\frac{-1}{y}=x^2+c$$

$$y=\frac{-1}{x^2+c}$$

حل المعادلات التفاضلية الخاضعة للشروط المنصوص عليها :

Example: (6)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{(1+y^2)^3}}{y} \qquad x\le 0 \;\;,\;\; y\le 1$$

$$\int\frac{y\,dy}{(1+y^2)^{3/2}}=\int dx$$

$$\int y(1+y^2)^{-3/2}dy=\int dx$$

$$\frac{1}{2}.\int 2y(1+y^2)^{-3/2}dx=\int dx$$

$$\frac{1}{2}.\frac{-1}{\frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}}=x+c$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+1^2}}=0+c \qquad \Rightarrow c=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{-1}{\sqrt{1+y^2}}=x-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1+y^2}=\frac{-1}{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$1+y^2=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}x-1}$$

$$y^2=-1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x-1}$$

$$y=\mp\sqrt{-1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x-1}}$$

Example: (7)

$$\frac{dy}{dx}=x\sqrt{1+x^2} \qquad x=0\,,y=-3$$

$$\int dy=\int x\sqrt{1+x^2}.dx$$

$$\int dy=\frac{1}{2}\int(1+x^2)\ .2xdx$$

$$y=\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+c$$

$$-3=\frac{1}{3}\sqrt{(1+0)^3}+c$$

$$c=\frac{-10}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}-\frac{10}{3}$$

Example:(8)

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

1,10) $y\neq 0\ ,x\neq 0$

$$ydx-xdy=0$$

$$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0$$

$$\int\frac{dy}{y}-\int\frac{dx}{x}=0$$

$$Lny-Lnx+c=0$$

$$Ln\frac{y}{x}+c=0$$

$$c=-Ln\frac{y}{x}$$

$$c=-Ln\frac{10}{1}$$

$$c=-Ln10$$

$$\therefore c=-1 \Rightarrow Ln\frac{y}{x}-1=0$$

$$lny=lnx=lne^c$$

$$ln|y|=ln(|x|.e^c)$$

$$y=x.e^c$$

$$y=x.e^{-1}$$

الحل العام

Example:(9)

$$\frac{dy}{x}+\frac{dx}{y}=0 \qquad (1,1)$$

$$\frac{dy}{x}=-\frac{dx}{y}$$

$$\int y\,dy=-\int x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+c$$

$$\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}+c=0$$

$$\frac{1^2}{2}+\frac{1^2}{2}+c=0$$

$$\Rightarrow c=-1\Rightarrow \frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-1=0$$

$$\frac{y^2}{2}=1-\frac{x^2}{2}\Big| *2$$

$$y^2=2-x^2$$

$$y=\pm\sqrt{2-x^2}$$

Example(10) :

$$\frac{dy}{dx}=e^{5x-y} \qquad (0,0)$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{5x}.e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}}=e^{5x}dx$$

$$\int e^{y}\,dy=\frac{1}{5}\int e^{5x}.5dx$$

$$e^{y}=\frac{1}{5}e^{5x}+c$$

$$e^{0}=\frac{1}{5}e^{0}+c \qquad \because e^{0}=1$$

$$\therefore\ c=-\frac{1}{5}$$

$$\therefore\ e^{y}=\frac{1}{5}e^{5x}-\frac{1}{5}$$

$$\ln e^{y}=\ln(\frac{1}{5}e^{5x}-\frac{1}{5})$$

$$y\ln e=\ln(\frac{1}{5}e^{5x}-\frac{1}{5})$$

$$y=\ln(\frac{1}{5}e^{5x}-\frac{1}{5})$$

تمارين تطبيقية :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية عند النقطة المعينة:

1) $\frac{dy}{dx}+y=1 \qquad (1,1)$

2) $x\,y^3\,dx+e^{x^2}dy=0 \qquad (0,1)$

3) $x^2dx+y(x-1)\,dy=0 \qquad (1,2)$

4) $xy^3dx+(y+1)\,e^{-x}dy \qquad (0,3)$

5) $\frac{dy}{dx}+x+2y=0 \qquad (0,5)$

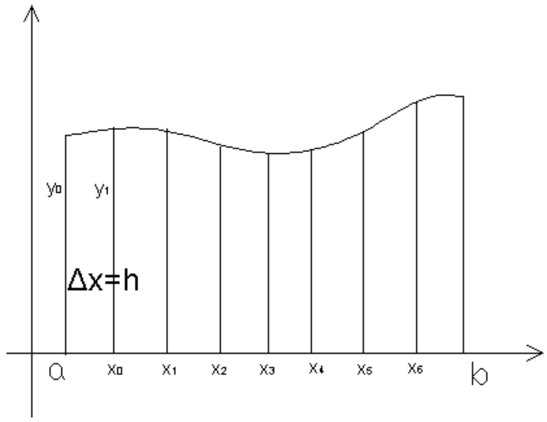
6) $y.\frac{Lnx}{x}=\frac{dy}{dx}$

7) $\frac{dy}{dx}=xy \qquad (0,10)$

☬Numerical Methods in integration الطرق العددية في التكامل☬

1- قاعدة شبه المنحرف Rule of trapezoidal :

لتكن f(x) دالة غير سالبة وقابلة للتكامل ضمن الفترة [a,b] تجزئ الفترة الى n من الفترات بتجزئة منتظمة ونحدد الإحداثيات الصادية وبذلك تقسم الى n من الشرائح .



$$h = \Delta X = \frac{b-a}{n}$$

$$X_i = a + i\Delta x$$

$$X_0 = a$$

$$X_1 = a + 1\Delta x$$

$$X_2 = a + 2\Delta x$$

$$X_3 = a + 3\Delta x$$

$$X_4 = a + 4\Delta x$$

$$X_5 = a + 5\Delta x = b$$

i = عداد

$$A_1 = \left(\frac{y_0 + y_1}{2}\right) . h$$

المساحة = العرض x الارتفاع

= المعدل بين الطولين x العرض

$$\therefore A = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots\dots\dots\dots \frac{y_n}{2}\right]$$

n يمكن ان يكون عدد فردي

☜**مثال (1) إحسب القيمة التقريبية للتكامل المحصور بين x=1 , x=0 بطريقة شبه المنحرف على اعتبار n=5 .**

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
0.2	Y_1	0.96
0.4	Y_2	0.86
0.6	Y_3	0.73
0.8	Y_4	0.61
1	Y_5	0.5

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0.2$$

$$A = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} dx = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \frac{y_5}{2}\right]$$

$$= 0.2\left[\frac{1}{2} + 0.96 + 0.86 + 0.73 + 0.61 + \frac{0.5}{2}\right]$$

$$= 0.2\left[\frac{1.5}{2} + 3.16\right]$$

$$= 0.2[0.75 + 3.16] = 0.2[3.91] = 0.782$$

☜مثال (2)إحسب قيمة التكامل بطريقة شبه المنحرف ثم احسب قيمة التكامل بالطريقة الحقيقية على اعتبار n=5 .

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
0.2	Y_1	0.04
0.4	Y_2	0.16
0.6	Y_3	0.36
0.8	Y_4	0.64
1	Y_5	1

$$A=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\,{}_0/^1=\frac{1}{3}=0.333334$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{5}=0.2$$

$$A=\int_0^1 x^2\,dx=0.2\left[0+0.04+0.16+0.36+0.64+\frac{1}{2}\right]$$

$$=0.34$$

☜مثال (3) إحسب قيمة التكامل بالطريقة الحقيقية ثم بطريقة شبه المنحرف وافرض ان n=5 .

$$\int_1^2 \frac{dx}{x}$$

X	Y	F(x)
1	Y_0	1
1.2	Y_1	0.83
1.4	Y_2	0.71
1.6	Y_3	0.62
1.8	Y_4	0.56
2	Y_5	0.5

$$A=\int_1^2 \frac{dx}{x}=\mathrm{Ln}|x|\,{}_1/^2=\mathrm{Ln}2-\mathrm{Ln}1=0.693$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{5}=0.2$$

$$A=0.2\left[\frac{1}{2}+0.83+0.71+0.62+0.56+\frac{0.5}{2}\right]$$

$$A=0.694$$

☜مثال (4)إحسب قيمة التكامل بطريقة شبه المنحرف بأخذ n=4 .

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
0.25	Y_1	0.9399
0.50	Y_2	0.7788
0.75	Y_3	0.5701
1	Y_4	0.3679

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{4}=0.25$$

$$A=0.25\left[\frac{1}{2}+0.9399+0.7788+0.5701+\frac{0.3679}{2}\right]$$

$$A=0.25[0.5+0.9399+0.18395]=2.97275$$

☜مثال(5) إحسب التكامل بطريقة شبه المنحرف افرض **n=5** .

$$\int_{-3}^{2}\sqrt{9-x^2}\,dx$$

X	Y	F(x)
-3	Y_0	0
-2	Y_1	$\sqrt{5}$
-1	Y_2	$\sqrt{8}$
0	Y_3	3
1	Y_4	$\sqrt{8}$
2	Y_5	$\sqrt{5}$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2+3}{5}=\frac{5}{5}=1$$

$$A=1\left[0+\sqrt{5}+\sqrt{8}+3+\sqrt{8}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$=\left[\sqrt{5}+2\sqrt{8}+3+\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$$

$$=[2.236+5.6569+1.118]=12.0109$$

☜مثال(6) $\int_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^2}$ افرض n=5

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
0.1	Y_1	$\frac{1}{1.01}$
0.2	Y_2	$\frac{1}{1.04}$
0.3	Y_3	$\frac{1}{1.09}$
0.4	Y_4	$\frac{1}{1.16}$
0.5	Y_5	$\frac{1}{1.25}$

$$h=\frac{1/2-0}{5}=0.1$$

$$A=0.1\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{1.01}+\frac{1}{1.04}+\frac{1}{1.09}+\frac{1}{1.16}+\frac{1}{2(1.25)}\right]$$

$$=0.4631\ (\text{Uint}^2)$$

❤❤ طريقة سمسون ❤❤❤ Simpson's Rule ❤❤

في هذه الطريقة يجب ان تكون التقسيمات بعدد زوجي{ ....4,6,8,10}

$$n = 2m$$

$$h = \frac{a-b}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots\ldots + y_n\right]$$

☜مثال (1) باستخدام طريقة سمسون أحسب قيمة التكامل وافرض n=4

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2}$$

X	Y	F(x)
0	Y_0	1
$\frac{1}{8}$	Y_1	$\frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2}$
$\frac{1}{4}$	Y_2	$\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2}$
$\frac{3}{8}$	Y_3	$\frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2}$
$\frac{1}{2}$	Y_4	$\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}$

$$h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{4} = \frac{1}{8}$$

$$A = \frac{1}{8*3}\left[1 + 4*\frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2} + 2*\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 4*\frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[1 + \frac{256}{65} + \frac{32}{17} + \frac{256}{73} + \frac{4}{3}\right] = 0.4637$$

☜مثال (2) استخدام طريقة سمسون n=4 .

$$\int_0^1 x^2 dx$$

X	Y	F(x)
0		1
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$		$\frac{9}{16}$
1		1

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{1}{4*3}\left[0 + 4*\frac{1}{16} + 2*\frac{1}{4} + 4*\frac{9}{16} + 1\right]$$

$$= \frac{1}{12}[4] = \frac{1}{3}\ \text{Sq.Unit.}$$

☜مثال (3) استخدام طريقة سمسون n=4 .

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx$$

$$h = \frac{2-1}{4} = 0.25$$

$$A = \frac{0.25}{3}[1+4*0.8+2*0.066+4*0.57+0.5]$$

$$= 0.693 \text{ Sq.uint}$$

X	Y	F(x)
1	Y_0	1
1.25	Y_1	0.8
1.5	Y_2	0.66
1.75	Y_3	0.57
2	Y_4	0.5

☜مثال (4) استخدام طريقة سمسون (n=6).

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}dx$$

$$h = \frac{3+3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$A = \frac{1}{3}\left[0+4*\sqrt{13}+2*\sqrt{8}+4*3+2*\sqrt{8}+4*\sqrt{13}+0\right]$$

$$A = \frac{1}{3}[14.4222+5.6568+12+5.6568+14.4222]$$

$$A = [17.386]$$

X	Y	F(x)
-3	Y_0	0
-2	Y_1	$\sqrt{13}$
-1	Y_2	$\sqrt{8}$
0	Y_3	3
1	Y_4	$\sqrt{8}$
2	Y_5	$\sqrt{13}$
3	Y_6	0

✍تمارين تطبيقية :-

1) $= \int_1^4 \frac{2}{(1+x^2)}dx \qquad n = 5$

2) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\text{Sin}x} \qquad n = 4$

3) $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx \qquad n = 5$

4) $\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{1+x}}dx \qquad n = 6$

5) $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}dx \qquad n = 4$

المتسلسلات والمتواليات.(Sequences and Series)

المتواليات: هي دالة مجالها(Z^+) مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة فاذا كان مجالها {1,2,3,4,5،.........}فأنها متوالية غير منتهية .اما اذا كان مجالها من النوع {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}فأنها متوالية منتهية اما المجال المقابل للدالة فهو R مجموعة الاعداد الحقيقية .ويرمز لها بالرمز { a_n } او{ U_n }

$\{ a_n \}=\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots\}$

$a_1=$at n=1

$a_2=$at n=2

$a_3=$at n=3

.

.

المتتابعة الحسابية: وهي المتتابعة التي يكون فيها ناتج طرح كل حد من الذي يليه يساوي عدد ثابت ويسمى d.

$d=U_{n+1}- U_n$

$a_1=a$

$a_2=a+d$

$a_3=(a+d)+d=a+2d$

$a_4=(a+2d)+d=a+3d$

$a_n=a+(n-1)d$

يستخدم لإيجاد عدد الحدود المجهولة n

العدد الثابت dيسمى الاساس.

<u>مثال1 :</u>اكتب المتوالية العددية التالية $a_{n}= n^2+1$

$n=\{7,8,9,10\ldots\ldots،20\}$

$a_1=1^2+1=2$

$a_2=2^2+1=5$

$a_3=3^2+1=10$

:

$a_{20}=20^2+1=401$

$\{a_n\}=\{2,5,10,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots410\}$

<u>مثال2 :</u>اكتب المتوالية العددية التالية حيث ان

$$\{U_n\}=\left\{ {}^{1}/_{n^2} \quad \text{فردي} \quad n\le 5 \;\middle|\; n+1 \quad \text{زوجي} \quad n\le 6 \right\}$$

$U_1=1/1^2=1$

$U_2=2+1=3$

$U_3=1/3^2=1/9$

$U_4=4+1=5$

$U_5=1/5^2=1/25$

$U_6=6+1=7$

$\{ U_n \}=\{1 , 3 , 1/9 , 5 , 1/25 , 7 \}$

<u>مثال 3:</u>جد الحد العاشر من المتتابعة الحسابية التي حدها الاول يساوي 3واساسها يساوي 3 .

$a=3$

$d=3$

$a_{10}=a+9d$

$a_{10}=3+9*3=30$

<u>مثال 4:</u>اكتب المتتابعة التي حدها الاول 7واساسها 3-.او اكتب قيمة الحدود الستة الاولى فقط.

$a=7$

$d=-3$

$a_1=7$

$a_2=a_1+d=7-3=4$

$a_3=a_1+2d=7+2(-3)=1$

$a_4=a_1+3d=7+3(-3)=-2$

$a_5=a_1+4d=7+4(-3)=-5$

$a_6=a_1+5d=7+5(-3)=-8$

$\{a_n\}=\{7,4,1,-2,-5,-8,............\}$

<u>مثال 5:</u> متتابعة حسابية حدها الثالث 9 وحدها السابع 3 - أوجد الحدود المحصورة بين الثالث والسابع .

$a_3=a+2d \Longrightarrow 9=a+2d$ 1

$a_7=a+6d \Longrightarrow -3=a+6d$ 2

بحل المعادلتين انيا بواسطة الطرح ينتج المعادلة التالية

$12= -4d$

$d=12/-4= -3$

بالتعويض في معادلة 1 $9=a+(2*-3)$

$9=a-6$

$a_1=15$

$a_3=9$

$a_2=a+d=15+(-3)=12$

$a_4=a+3d=15+(3*-3)=6$

$a_5=a+4d=15+(4*-3)=3$

$a_6=a+5d=15+(5*-3)=0$

$a_7=a+6d=15+(6*-3)= -3$

$\{a_n\}=\{15,12,9,6,3,0, -3\}$

مثال 6:جد عدد الحدود n للمتتابعة الحسابية .

$\{a_n\}=\{-20,-17,-14,\ldots\ldots\ldots\ldots,55\}$

$a=a_1=-20$ الحد الاول

$d=a_2-a_1=-17-(-20)=3$ الاساس

$a_n=a_1+(n-1)d$

$55=-20+(n-1)*3$

$55=-20+3n-3$

$55=-23+3n$

$55+23=3n$

$78=3n$

$n=78/3$

$n=26$ عدد حدود المتتابعة الحسابية

<u>ايجاد مجموع حدود المتتابعة الحسابية المنتهية</u>

$\{a_n\}=\{ a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots\ldots\ldots\ldots, a_n\}$

$S_n=(n/2)\ [a+ a_n]$

ايجاد مجموع حدود المتتابعة الحسابية غير المنتهية

$\{a_n\}=\{ a_1, a_2, a_3, a_4,\ldots\ldots\ldots\ldots \}$

$S_n=(n/2)\ [2a+(n-1)d]$

<u>مثال 7</u>:اوجد مجموع 20 حدا من المتتابعة الحسابية حدها الاول (-8) والعشرين (48).

$$a_1 = -8$$

$$a_{20} = 48$$

n=20

$$S_n = {}^{n}/_{2}\,[a_1 + a_n]$$

$$S_n = {}^{20}/_{2}\,[-8 + 48]$$

$$S_n = 10[40] = 400$$

Summation is 400

<u>مثال 8</u>:اوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية {1,2,3,.......,100}

$$a_1 = 1$$

$$d = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$

∴ المتتابعة منتهية

n = 100

$$S_n = {}^{n}/_{2}\,[a_1 + a_n]$$

$$S_n = {}^{100}/_{2}\,[1 + 100]$$

$$S_n = 50[101] = 5050$$

مثال 9:اوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية {2,5,8,.......,29}

$$a_1 = 2$$

$$d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$$

$a_n=a_1+(n-1)d$

$29=2+(n-1)*3$ ∴ المتتابعة منتهية

$29=-1+3n$

$3n=30$

$n = 10$

$$S_n = {}^{n}/_{2}\,[a_1 + a_n]$$

$$S_n = {}^{10}/_{2}\,[2 + 29]$$

$$S_n = 5[31] = 155$$

مثال 10:المتتابعة الحسابية التي حدها الثاني =4 وحدها ما قبل الاخير (22) وعدد حدودها 12 جد مجموعها .

$$\{-, 4, -, \dots \dots., 22, a_n\}$$

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$$

$$a_1 + a_n = 4 + 22$$

$$a_1 + a_n = 26$$

n= 12

$$S_n = {}^{n}/_{2}\,[a_1 + a_n]$$

$$S_n = {}^{12}/_{2}\,[26]$$

$$S_n = 6[26] = 156$$

ايجاد مجموع حدود المتتابعة الحسابية الغير المنتهية

مثال 11: جد مجموع الحدود الثمانية الاولى من المتتابعة التالية

$$\{-, 4, 1, 6, \dots\dots\dots\dots\dots.\}$$

S_n=(n/2) [2a+(n-1)d]

n=8

a_1=-4

d=a_2-a_1=1-(-4)=5   الاساس...........

S_n=(8/2) [2(-4)+(8-1)5]

S_n=(4)[-8+7*5]

S_n=(4)[-8+7*5]

S_n=(4)[27]=108

<u>مثال 12:</u>اذا كان مجموع n حدا من المتتابعة الحسابية $3n^2+2n$ فما هو حدها العشرين (20).

$S_n=3n^2+2n$

$S_{20}=(3*20^2)+(2*20)$.................... مجموع الحد العشرون

$S_{20}=1200+40=12400$

$S_{19}=(3*19^2)+(2*19)$.................... مجموع الحد التاسع عشر

$S_{19}=(3*361)+(38)=1121$

$a_{20}=S_{20}-S_{19}$

$a_{20}=1240-1121=119$

<u>مثال 13:</u>جد مجموع الاعداد الصحيحة المحصورة بين 400 و100وتقبل القسمة على 3.

$d=3$

$100/3=33$ والباقي 1

$400/3=133$ والباقي 1

$133*3=399$ الحد الاخير a_n

$33*3=102$ الحد الاول a_1

{102,.................,399}

$a_n=a_1+(n-1)d$

$399=102+(n-1)*3$

$n=100$

$$S_n = {}^{n}/_{2}\,[a_1 + a_n]$$

$$S_n = {}^{100}/_{2}\,[102 + 399]$$

S_n=25050

<u>المتتابعة الهندسية :</u> وهي المتتابعة التي ليس فيها حد يساوي صفر ويكون ناتج القسمة لأي حد فيها على سابقة يساوي مقدار ثابت R.

$R=a_{n+1}/a_n$ or $r=a_{n+1}/a_n$

<u>انواع المتتابعات الهندسية :</u>

1-اذا كانت a_1 موجبة

r<1 (موجبة) تكون المتتابعة الهندسية تنازلية {4,2,1,1/2...........}

r =1 تكون المتتابعة الهندسية ثابتة {2,2 ,2,2,2...........}

r>1 (موجبة) تكون المتتابعة الهندسية تصاعدية {4,8,10, ...}

r<1 (سالبة) تكون المتتابعة الهندسية تنازلية الحد الاول موجب والحد الثاني سالب والثالث موجب والرابع سالب وهكذا {4,-2,1,- 1,2...........}

2-اذا كانت a_1 سالبة

r<1 (موجبة) تكون المتتابعة الهندسية تصاعدية

{-4,-2,-1,-1/2,................}

r =1 تكون المتتابعة الهندسية ثابتة {-2,-2 ,-2,-2,-2...........}

r>1 (موجبة) تكون المتتابعة الهندسية تصاعدية

.{-4,-8,-16, ...}

r<1 (سالبة) تكون المتتابعة الهندسية تنازلية الحد الاول سالب والحد الثاني موجب والثالث سالب والرابع موجب

وهكذا {-4, 2,-1, 1,2...........}

$R=a_{n+1}/a_n$

$a_1=a$

$a_2=ar$

$a_3= a*r*r=ar^2$

$a_4=a\ r^2*r= ar^3$

$a_5=a\ r^3*r= ar^4$

$a_6=a\ r^4*r= ar^5$

$a_{10}=a\ r^8*r= ar^9$

$a_{25}=a\ r^{23}*r= ar^{24}$

$a_n=ar^{n-1}$

مثال 1: اكتب الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول (64)واساسها (-1/2).

$a_1=a=64$

$a_2=ar$

$a_2=ar=64*(-1/2)=-32$

$a_3= ar*r=-32* (-1/2)=16$

$a_4=a\ r^2*r= 16* (-1/2)=-8$

$a_5=a\ r^3*r= -8* (-1/2)=4$

$a_6=a\ r^4*r= ar^5* (-1/2) =-2$

$\{a_n\}=\{64,-32, 16,-8,4,-2 \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

<u>مثال 2:</u> جد الحد السابع من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول (-1/4)واساسها (2).

$a_7= ar^6$

$a_7=$ $-1/4*2^6=-1/4*64=-16$

<u>مثال 3:</u> جد الحد الثامن من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول (3)والخامس (48).

$a_5=\ ar^4$

$48=3*$ **r^4** ………………../3

$16=$ **r^4**

$2^4=$ **r^4**

$r = \pm 2$

$a_8 = ar^7$

$a_8 = 3*(\pm 2)^7$

$a_8 = 3*(\pm 128)$

$a_8 = \pm 384$

<u>مثال 4:</u>جد الحد السادس لمتوالية هندسية مجموع حدودها الثلاثة الاولى (7)وحدها الثالث (1).

$a_1 + a_2 + a_3 = 7$

$a + a r + a r^2 = 7$

$a_3 = 1$

$a_3 = a r^2$

$a r^2 = 1$

$a = 1/r^2$

$(1/r^2) + (1/r^2) * r + (1/r^2) * r^2 = 7$

$(1/r^2) + (1/r) + 1 = 7$

$(1/r^2) + (1/r) + 1 - 7 = 0$ .... $* \ r^2$

$1 + r - 6 r^2 = 0$ .... -1

$6 r^2 - r - 1 = 0$

$(3 r+1)(2 r-1) = 0$

$if\ 3r+1=0 \longrightarrow$ يهمل لان المتتابعة موجبة $r=-1/3$

$2r-1=0$ $r=1/2$ الاساس

$a_1 = 1/(1/2)^2 = 4$

$a_6 = a_1 * r^5$

$a_6 = 4*(1/2)^5 = 4*1/32 = 1/8$

$a_6 = 1/8$

$\{a_n\} = \{4, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, 1/8, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

<u>مجموع المتتابعة الهندسية النهائية:</u>

$\{a_n\} = \{4, 8, 16, 32, 64, 128\}$

$$S_n = \frac{a(1-(r)^n)}{(1-r)}$$

<u>مثال 5:</u>جد مجموع ستة من الحدود الاولى من المتتابعة الهندسية

$\{a_n\} = \{64, 32, 16, \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

$a = 64$

$a_2 = 32$

$r = a_2/a_1$

$r = 32/64 = 1/2$

$n = 6$

$$S_6 = {64(1-(1/2)^6)}\Big/{(1-1/2)}$$

$$S_6 = {64(1-(1/64)\ \ )}\Big/{1/2}$$

$$S_6 = {64(63/64)\ \ )}\Big/{1/2}$$

$$S_6 = 63 * 2 = 126$$

مجموع متتابعة هندسية اللانـهائية:

$$S_n = \frac{a}{1-r}$$

مثال 6: جد مجموع المتتابعة

$$\left\{{}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{4}, {}^{1}/_{5}, \ldots\ldots\right\}$$

$$a = {}^{1}/_{2}$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{{}^{1}/_{4}}{{}^{1}/_{2}} = {}^{1}/_{4} * 2 = {}^{1}/_{2}$$

$$S_n = \frac{{}^{1}/_{2}}{1-{}^{1}/_{2}} = \frac{{}^{1}/_{2}}{{}^{1}/_{2}} = 1$$

مثال 7: جد مجموع المتتابعة الهندسية

$$\{0.4\,,0.04\,,0.004\,,\ldots\ldots,\infty\}$$

0.4+0.04+0.004+........+∞

$$a=a_1=0.4$$

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{0.04}{0.4}=\frac{1}{10}=0.1$$

$$S_n=\frac{a}{1-r}=\frac{0.4}{1-0.1}=\frac{0.4}{0.9}=\frac{4}{9}$$

مثال 8: جد مجموع المتتابعه الهندسية

64-16+4-........

a =64

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-16}{64}=\frac{-1}{4}$$

$$S_n=\frac{a}{1-r}=\frac{64}{1-({}^{1}\!/_{4})}=\frac{64}{{}^{5}\!/_{4}}=64*\frac{4}{5}=\frac{256}{5}$$

مثال 9: اذا كان مجموع متتابعة هندسية اساسها=3 هو728 وحدها الاخير هو 486 جد حدها الاول وعدد حدودها؟

$$S_n=728$$

r =3

$$728=\frac{a(1-3^n)}{1-3}$$

$$728 = \frac{a(1-3^n)}{-2}$$

$$a - a3^n = -1456$$

$$a_n = 486$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$486 = a3^{n-1}$$

$$[486 = a.3^n.3^{-1}] * 3$$

$$1458 = a3^n$$

نعوض معادلة2 في معادلة 1

$$a - 1458 = -1456$$

a= 1458-1456=2

a= 2

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$[486 = 2 * r^{n-1}] * 3$$

$$1486 = 2 * 3^n$$

$$3^6 * 2 = 2 * 3^n$$

$$3^6 = 3^n$$

n= 6

$n = 6$ وعدد الحدود $\qquad a_1 = 2$

المصادر :-

1) **طرق عددية د. علي سيفي**

2) طرق حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية وتطبيقاتها د. رياض شاكر

3) **الرياضيات / رشيد حازم مجيد عسكر ، قاسم عبد الرزاق**

(4 **References Calculus (Thomas)**

(5 Series Shomes

6) حساب التفاضل والتكامل / فرانك أيرز.

7) التفاضل والتكامل / خالد احمد السامرائي .

8) الجبر والهندسة التحليلية / د. فؤاد محمد .

9) مبادئ الجبر الخطي د.موفق حجه ، د.محمد هيلات .

10) مقدمة في المعادلات التفاضليه الاعتياديه وتطبيقاتها

د.سمير يشير حديد ، د.علي محمد صادق سيفي .