الاسبوع الاول

حل المعادلات

عملية التحليل: تجزئة المقدار الجبري الى بعض العوامل اي تحويله من متعدد الحدود الى حد واحد مثلا $ba2+b2$ يمكن ان يكتب $b(a2+b)$ وهذا مقدار جبري مكون من حاصل ضرب عاملين اي حد واحد فقط

انواع طرائق التحليل

أ- اخراج العوامل المشتركة بين الحدود:

1- $4a^2+2ab=2a(2a+b)$, 2- $3ax-ay+3bx-by=(3ax-ay)+(3bx-by)\ =a(3x-y)+b(3x-y)\ =(3x-y)(a+b)$

ب- مربع كامل : و مربع ذو حدين اي مقدار جبري يكون مكون من ثلاث حدود وان يكون كل من حديه الاول والثالث مربعا كاملا وان يكون الحد الوسطي فيه مساويا لضعف حاصل ضرب جذري الحدين الاخرين مثلا

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

ج- الفرق بين مربعين ومثل

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, $x^4-y^4=(\underline{x}^2\underline{+y}^2)(x^2-y^2)=(x^2+y^2)(x-y)(x+y)$

فنلاحظ ان $x2+y2$ فغير قابل للتحليل الى فرق مربعين

د-مجموع او الفرق بين مكعبين وامثله

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$, $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$,

هـ - مربع الناقص : وذلك بأضافة وطرح المقدار الذ يحتاج اليه ليصبح مربعا كاملا على شرط ان يكون هذا النقص المضاف والمطروح مربعا كاملا حتى نحصل بذلك على فرق بين مربعين مثلا :

- $4X^4+3X^2Y^2+Y^4=4X^4+4X2Y2+Y^4-X^2Y^2+X^2Y^2=4X^4+4X^2Y^2+Y^4-X^2Y^2$ بأضافة وطرح X^2Y^2

$=(2X^2+Y^2)^2-X^2Y^2$

- $X^4+4X^2+3=X^4+4X^2+3-1+1=(X^2+2)^2-1=\{(X^2+2)-1\}\{(X^2+2)+1\}=(X^2+1)(X^2+3)$ ويمكن حله بطريقة التجربة

طرائق حل المعادلات من الدرجة الثانية

وطرائق حل المعادلة من الدرجة الثانية هي [طريقة التحليل ، طريقة اكمال المربع ،طريقة الدستور]

١- طريقة الدستور (القانون العام)

قانون الدستور $X=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

b^2-4ac يسمى المقدار المميز ويقرأ دلتا Δ ، المعاملات $a\ b\ c$ كميات حقيقية

- اذا كان $b^2-4ac>0$ الجذران حقيقيان وغير متساويان .اكتب المعادلة هنا
- اذا كان $b^2-4ac<0$ الجذران خاليان وغير متساويان وهذا يفيدنا في الحل
- اذا كان $b^2-4ac=0$ الجذران حقيقيان و متساويان

مثال:

- $X-5X^{½}+4=0$, $X^2-3X+1=0$, $X^2-4X+6=0$, $X^2-4X-5=0$, $X^2-4X+4=0$

تمارين صفحة ١٩

الاسبوع الثاني

حل المعادلتين من الدرجة الاولى انيا وبيانيا

اولا/ انيا :

- يجب تساوي معاملات لاحد المتغيريين وعكس الاشارة

- عند ايجاد قيمة Xنعوضها في المعادلة لايجاد قيمة Y

-عند طلب التأكد من صحة الحل نأخذ القيمه ونعوضها في المعادلتين لتحقق نفس النتيجة

مثل

1) 3X-Y=6 -------(1)

X-Y=4-------(2) نضرب معادلة رقم (٢) ب (-١)

3X-Y=6 -----(1)

-X+Y=-4 ----(2)

2) 1/2 (X+2)-1/3 (Y-2)=3 ------(1) نضرب في (٦) العامل المشترك الاصغر

1/4X+1/2Y=0 ------(2) نضرب في (٤)

* يمكن حل المعادلات اعلاه بطريقة التعويض

مثل:

1)2X+3Y=13 ------(1)

3X-2Y=0 --------(2) نأخذ معادلة (٢)

3X=2Y → X=2Y/3 نعوضها في معادلة (١)

2)X-2Y=11 ------(1)

2X-3Y=18 ----(2)

3)3X-4Y-12=0 -------(1)

5X+2Y+6=0 -------(2) مجموع الحل(0,-3)

4) 0.1X-3Y=12 -----(1)

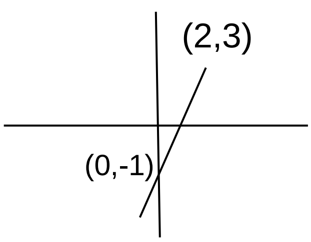
0.2X-4Y=24 -----(2) تحل بالطرح وتغيير الاشارات

ثانيا/ حل المعادلات بيانيا :

مثل

1)2X-Y=1 ----Y=2X-1----- نفرض قيمة X (0) Y=-1 (0,-1)

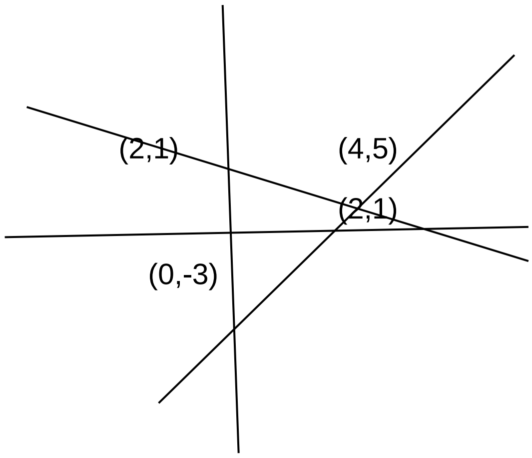
نفرض قيمة X(2) Y= 3 (2,3)



2)Y=2X-3 , X+2Y=4

Y=2X-3 X=0 Y=-3 (0,-3) X=4 Y=5 (4,5)

X+2Y=4 Y=0 X=4 (4,0) Y=1 X=2 (2,1)



مجموعة الحلول هو تقاطع الخطين

امثله

4X+3Y=17 ,2X+3Y=13

<u>الاسبوع الثالث :</u>

<u>تعريف المحدد:</u> المحدد من الرتبة nXn هو عدد حقيقي نتحصل عليه من المصفوفه المربعه وذلك بأستخدام قواعد حسابية معينة نرمز له بالرمز det(A)

١- المحددات ، حل المعادلات الانية بأستخدام المحددات

تعريف عن المصفوفه :

نرمز للمصفوفه ب /A=/a ij حيث I,J يشير الى الترتيب في المحدد الذي يظهر فيها العنصر ، حيث [I تمثل رقم الصف ، و J تمثل رقم العمود] ويكتب المحددة ذات السعه nxn بالصيغه الاتيه

$$A=\begin{vmatrix} a11 & a12\ldots. & a1n \\ a21 & a22\ldots. & a2n \\ an1 & an2\ldots. & ann \end{vmatrix}$$

حيث عدد الصفوف n وعدد الاعمده n

سالب

$$\begin{vmatrix} A1 & B1 \\ A2 & B2 \end{vmatrix}$$

موجب

<u>١-١المحددات الثنائية: Determinants of second order</u>

عندما تكتب الكميات الأربع a_1 , b_1 , a_2 , b_2 على الصورة التالية:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

فإنه يقصد بذلك المقدار الجبري $a_1b_2 - a_2b_1$ وتكتب هذه النتيجة على الصورة التالية:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

ويسمى الطرف الأيسر لهذه المتساوية بالمحددة والطرف الأيمن بمفكوك المحددة، وتسمى الكميات a_1 , b_1 , a_2 , b_2 المرتبة كما هو موضح بالطرف الأيسر بعناصر أو مكونات المحددة. ولما كانت هذه المحددة تحتوى على صفين وعمودين فأنها تسمى <u>بالمحددات ذات الرتبة الثانية</u>

إوجد قيمة المحددة:

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2\times 5-(-8\times 4)=10-(-32)=42$$

اثبت أن:

$$i\begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}=1$$

$$ii\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}=-b^2$$

$$i\begin{vmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$ii\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix} = (a-b)\times(a+b) - a\times a$$

$$= a^2 - b^2 - a^2 = -b^2$$

٢-١ المحددات الثلاثية (ذات الرتبة الثالثة): Determinants of third order

على غرار ما سبق شرحه بالنسبة للمحددات الثنائية فإنه إذا وضعت الكميات التسع على الصورة:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فإنه يقصد بذلك المقدار

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

أي المقدار الجبري

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

ويمكن ان نختار الصف الثاني والثالث للحل

ونظراً لاحتواء هذه المحددة على ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة فإنها تسمى بالمحددة الثلاثية أو ذات الرتبة الثالثة.. وتسمى الكميات التسع $a_1\ a_2\ a_3$, $b_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$, بعناصر المحددة أو مكوناتها. ويلاحظ أنه يمكن فك المحددة باستخدام عناصر أو مكونات أي صف أو أي عمود مع مراعاة القاعدة التالية للإشارات:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ومن الجدير بالذكر ملاحظة أن الإشارة المصاحبة للعنصر تتبع القاعدة $(-1)^m$ حيث m هي مجموع رقمي الصف والعمود الموجود به العنصر.

*ويمكن حسابها بطريقة اخرى

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{matrix}$$

=a1 b2 c3+ b1 c2 a3 +c1 a2 a3 -a3 b2 c1 -b3 c2 a1 -c3 a2 b1

مثال: إوجد مفكوك المحددة الثلاثية التالية:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

<u>الحـــــل</u>

يمكن فك هذه المحددة باستعمال أي صف أو أي عمود كما يأتي:

أولاً:باستعمال الصــــف الأول:

$$D = 3(7\times 9 - 2\times 2) - 4(5\times 9 - 2\times 1) + 1(5\times 2 - 7\times 1)$$
$$= 3(63-4) - 4(45-2) + 1(10-7) = 8$$

ثانياً:باستعمال الصــف الثاني:

$$D = -5(4\times 9 - 1\times 2) + 7(3\times 9 - 1\times 1) - 2(3\times 2 - 4\times 1)$$
$$= -5(36-2) + 7(27-1) - 2(6-4) = 8$$

ثالثاً:باستعمال الصــف الثالث:

$$D = 1(4\times 2 - 1\times 7) - 2(3\times 2 - 1\times 5) + 9(3\times 7 - 4\times 5)$$
$$= 1(8-7) - 2(6-5) + 9(21-20) = 8$$

رابعاً:باستعمال العمـود الأول:

$$D = 3(7\times 9 - 2\times 2) - 5(4\times 9 - 1\times 2) + 1(4\times 2 - 1\times 7)$$
$$= 3(63-4) - 4(36-2) + 1(8-7) = 8$$

خامساً:باستعمال العمود الثانى:

$$D = -4(5\times 9 - 2\times 1) + 7(3\times 9 - 1\times 1) - 2(3\times 2 - 1\times 5)$$
$$= -4(45-2) + 7(27-1) - 2(6-5) = 8$$

سادساً:باستعمال العمود الثالث:

$$D = 1(5\times 2 - 7\times 1) - 2(3\times 2 - 4\times 1) + 9(3\times 7 - 4\times 5)$$
$$= 1(10-7) - 2(6-4) + 9(21-20) = 8$$

٣-١ المحددات الصغرى (مرافق العنصر):

بملاحظة مفكوك أي محددة ثلاثية نجد أنها تحتوى على محددات أخرى من المرتبة الثانية ويطلق على هذه المحددات بالمحددات الصغرى للمحددة الأصلية.
فإذا كانت المحددة الأصلية هي:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فان المحددة الصغرى الناتجة عن حذف العمود الأول والصف الأول (أى العمود والصف اللذان يلتقيان عند العنصر a_1) تسمى المحددة الصغرى المناظرة للعنصر a_1 ويرمز لها بالرمز A_1 أي أن:

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وبالمثل فالمحددة الصغرى للعنصر b_2 والتي يرمز لها بالرمز B_2 هي:

$$B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

والمحددة الصغرى للعنصر c_3 والتي يرمز لها بالرمز C_3 هي:

$$C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ **وهكذا.......**

وباستخدام المحددات الصغرى يمكن كتابة مفكوك المحددة (D) بإحدى الصور الآتية:

باستخدام الصف الأول: $D = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1$

باستخدام الصف الثاني: $D = a_2A_2 + b_2B_2 - c_2C_2$

باستخدام الصف الثالث: $D = a_3A_3 - b_3B_3 + c_3C_3$

باستخدام العمود الأول: $D = a_1A_1 - a_1A_1 + a_3A_3$

باستخدام العمود الثاني: $D = b_1B_1 + b_2B_2 - b_3B_3$

باستخدام العمود الثالث: $D = c_1C_1 - c_2C_2 + c_3C_3$

ويتضح من ذلك أنه يمكن إيجاد مفكوك المحددة باستخدام عناصر أي صف أو أي عمود ويكون معامل كل عنصر هو المحددة الصغرى المناظرة لهذا العنصر مسبوقة بإشارة + أو - حسب قاعدة الإشارات السابق شرحها والتي ترتبط بوضع العنصر في المحددة حسب القاعدة $(-1)^m$ حيث m هي مجموع رتبتي الصف والعمود اللذان يلتقيان عند هذا العنصر.

مثال : إوجد مفكوك المحددة:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

الحـــل

باستخدام العمود الأول:

$$D = 3\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= 3(63-30) - 0(36-5) + 2(24-7) = 133$$

باستخدام الصف الأول:

$$D = 3\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 3(63-30) - 4(0-12) + 1(0-14) = 133$$

وهكذا باستخدام أي صف أو أي عمود يمكن الوصول إلى نفس النتيجة.

ويمكن الحصول على مفكوك محددة الرتبة الثالثة كما هو موضح في الشكل التالي، وفيه تكرر كتابة العمودين الأول والثاني إلى يمين العمود الثالث ثم نضرب الأعداد فى اتجاه الأسهم الموضحة ونأخذ الناتج بإشارته إن كان السهم متجهاً من اليسار إلى اليمين أ بإشارة مخالفة إن كان السهم متجهاً من اليمين إلى اليسار وتجمع هذه النواتج.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال:إوجد حل المحددة الآتية:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

<u>الحـــل</u>

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 6 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 9 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= ((3\times7\times9) + (4\times6\times2) + (1\times0\times5))$$
$$-((1\times7\times2) + (3\times6\times5) + 4\times0\times9))$$
$$= (189+48+0) - (14+90+0) = 237 - 104 = 133$$

<u>٤-١ خواص الأساسية للمحددات :</u>

<u>أولاً:</u> إذا بدلت الصفوف بالأعمدة في أي محددة فإن قيمة المحددة لا تتغير.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

لما كانت مكونات محددة الطرف الأيسر هي نفس مكونات محددة الطرف الأيمن، وبناءً على القاعدة القائلة بإمكان فك أي محددة باستخدام أي صف أو أي عمود فيها فإنه يمكن فك محددة الطرف الأيسر باستخدام الصف الأول ومحددة الطرف الأيمن باستخدام العمود الأول وبهذا نصل إلى المطلوب وهو تساوى قيمة المحددتين.

<u>ثانياً:</u> إذا أستبدل صف مكان صف أو عمود مكان عمود فإن إشارة هذه المحددة تتغير ولا تتغير قيمتها:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ونصل للمطلوب إثباته إذا تم فك محددة الطرف الأيسر باستخدام الصف الأول ومحددة الطرف الأيمن باستخدام الصف الثاني.

<u>ثالثاً:</u> تنعدم المحددة إذا تتطابق صفين أو عمودين فيها:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فلو فرضنا أن قيمة المحددة تساوى (D) باستخدام الخاصية السابقة واستبدال الصفين المتساويين (أو العمودين المتساويين) بعضهما ببعض فإن إشارة المحددة تتغير ولا تتغير قيمتها.

$$\therefore\ D = -D$$
$$\therefore 2D = 0$$
$$\therefore\ D = 0$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{matrix} \quad = 0$$

<u>رابعاً:</u> إذا ضربت عناصر أي صف أو عمود في مقدار ثابت (معامل ما) فإن هذا يعنى أن قيمة المحددة قد ضربت في نفس المقدار أو نفس المعامل كما يلي:

$$\begin{vmatrix} fa_1 & fb_1 & fc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = f\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

بفك الطرف الأيسر نجد أنه يساوى:

$$fa_1A_1 - fb_1B_1 + fc_1C_1 = f\left(a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1\right)$$

وهذا يساوى الطرف الأيمن.

ويمكن استخدام هذه الخاصية فى تبسيط حل بعض المحددات كما فى المثال التالي:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 16 & 16 & 8 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 8 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \times 3 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 240$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 10 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 5 \end{vmatrix} = 5 \times 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \times 4 \times 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 300$$

*حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين هو حاصل ضرب محدديهما

*مقلوب مصفوفه مربعة A هو المصفوفة المربعة A^{-1}- ان وجدت - بحيث حاصل ضربهما هو المصفوفة الموحدة اي ان

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

سنتطرق في هذا المستوى الى مقلوب المصفوفة ٢*٢ فقط

*اذا كان محدد مصفوفة مربعه A لا يساوي صفرا فأنها تقبل مقلوبا وحيدا

اذا كانت a وb و c و d اربعة اعداد حقيقية بحيث $\det A = ad-bc \neq 0$ لا يساوي صفر فأن

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad-bc} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

اي ان هذا القانون يسمح لنا بحساب مقلوب مصفوفة ٢ X ٢ عندما يكون محددها لا يساوي صفر

مثال : احسب مقلوب المصفوفات :

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

المحدد A لايساوي صفر

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -(-1) \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

محدد المصفوفة C يساوي الصفر اذن لا يوجد مقلوب

حاصل ضرب مصفوفه : حاصل ضرب صف في عمود له نفس عدد العناصر يساوي مجموع حاصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصرالموافق له من العمود

leg :

1- a= 1 -2 0 0.3 b= $\begin{matrix} -3 \\ 1 \\ 4 \\ 10 \end{matrix}$ = a*b =(1*-3)+(-2 *1) + (0 *4) + (0.3 * 10) = -3 -2 +0 +3 = -2

2- A= 1 -2 0 3 B= $\begin{matrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{matrix}$

لايمكن حسابها لان عدد عناصر الصف لايساوي العمود

- حاصل ضرب مصفوفتين

حاصل ضرب مصفوفه من الرتبة M * K في مصفوفه من الرتبه K * N (اي ان عدد الاعمدة للمصفوفة الاولى يساوي عدد الصفوف للمصفوفة الثانية)هو مصفوفة من الرتبة M * N وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفه الاولى في العمود الموافق له من المصفوفه الثانية

مثل

$$A=\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{matrix} \qquad B=\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{matrix} \qquad C=\begin{matrix} 1 & -2 & 30 \\ 15 & 0 & -12 \\ 23 & 3 & 6 \end{matrix}$$

جد A*B , B*A , B*C

١-٥ استخدام المحددات في حل المعادلات

أ- حل معادلتين خطيتين في مجهولين

نعلم أنه لحل المعادلتين

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

نقوم بحذف y من المعادلتين للحصول على قيمة x ثم تحذف x بينهما للحصول على y ، ويكون حل المعادلتين هو:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

وباستخدام المحددات يمكن كتابة الحل العام للمعادلتين الخطيتين على الصورة التالية:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

هذا بشرط أن محدد المقام لا يساوي صفر، أي أن المقدار الجبري $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ وهذا الحل العام يمكن كتابته أيضاً على الصورة:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$or\ \frac{x}{D_x} = \frac{y}{D_y} = \frac{1}{D}$$

وتسمى هذه الطريقة في حل المعادلات الخطية بقاعدة كرامر وتحصل على المحددة Dx من المحددة D (محددة المعاملات) بوضع الحدود المطلقة مكان عناصر العمود الأول (معاملات x) وبالمثل نحصل على المحددة Dy بوضع الحدود المطلقة مكان عناصر العمود الثاني (معاملاتy).

مثال : إوجد باستخدام المحددات حل المعادلتين:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ -5x + 4y &= -3 \end{aligned}$$

<u>الحــــل</u>

المطلوب نحصل عليه من العلاقتين:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x}{((8\times 4)-(-3\times -2))} = \frac{y}{((3\times -3)-(-5\times 8))}$$
$$= \frac{1}{((3\times 4)-(-5\times -2))}$$

$$\frac{x}{26} = \frac{y}{31} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 13 \leftrightarrow y = 15\tfrac{1}{2}$$

<u>ب- حل ثلاث معادلات خطية فى ثلاث مجاهيل:</u>

نفرض أن لدينا المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

فإذا رمزنا لمحددة المعادلات بالرمز D وهى الناتجة عن كتابة معاملات x,y,z في المعادلات الثلاث على صورة محددة فتكون A_1, A_2, A_3 هي المحددات الصغرى لعناصر العمود الأول فى المحددة D.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

وبضرب المعادلة الأولى في A_1 والثانية فى A_2- والثالثة فى A_3 والجمع ينتج أن:

$$(a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3)x + (b_1A_1 - b_2A_2 + b_3A_3)y$$
$$+ (c_1A_1 - c_2A_2 + c_3A_3)z = d_1A_1 - d_2A_2 + d_3A_3$$

ومن السهل إثبات أن معاملي y , z عبارة عن محددات تساوى الصفر وأن معامل x هو المحددة D.

$$\therefore x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = d_1A_1 - d_2A_2 + d_3A_3 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ومن السهل ملاحظة أن المحددة الأخيرة هى نفس المحددة D بعد استبدال معاملات x فى المعدلات الثلاثة بمقادير الطرف الأيمن وهى d_1,d_2,d_3 ويمكن أن نرمز لهذه المحددة بالرمز Dx وبذلك يكون:

$$x.D = Dx \qquad \therefore x = \frac{Dx}{D}$$

وبالمثل فإن:

$$y = \frac{Dy}{D}, z = \frac{Dz}{D}$$

$$\therefore \frac{x}{Dx} = \frac{y}{Dy} = \frac{z}{Dz} = \frac{1}{D}$$

أي أن:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

هذا القانون

ويلاحظ أن المحددة الأولى المكتوبة في مقام x ناتجة عن محددة المعاملات باستبدال معاملات x في المعاملات الثلاث بمقادير الطرف الأيمن وهى d_1 , d_2 , d_3 كذلك المحددة الثانية المكتوبة في مقام y فإنها تنتج من استبدال معاملات y في المعادلات الثلاث بالمقادير d_1 , d_2 , d_3 وبالمثل في المحددة الثالثة المكتوبة في مقام z فإنها تنتج من استبدال معاملات z في المعادلات الثلاث بالمقادير d_1 ,d_2 d_3 ويمكن تعميم هذه الطريقة في حل المعادلات الخطية لأي عدد من المجاهيل بشرط وجود حل مشترك لهما أي أن محددة المعاملات لا تساوى صفراً.

مثال: إوجد الحل المشترك للمعادلات الآتية:

$$2x + 3y + z = 12$$
$$4x + 6y - z = 9$$
$$x + 2y - 3z = -3$$

<u>الحـــل</u>

نحسب محددة المعاملات D كالآتى:

هذا اهم شي

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 2(-18+2) - 3(-12+1) + 1(8-6) = 3$$

اى أن محددة المعاملات لا تساوى صفراً وبذلك يكون للمعاملات الثلاثة حل مشترك.

$$\therefore \frac{x}{Dx} = \frac{y}{Dy} = \frac{z}{Dz} = \frac{1}{D}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 2 & 12 & 1 \\ 4 & 9 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 12 \\ 4 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \frac{x}{-66} = \frac{y}{51} = \frac{z}{15} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore x = \frac{-66}{3} = -22 \quad y = \frac{51}{3} = 17 \quad z = \frac{15}{3} = 5$$

الاسبوع الخامس

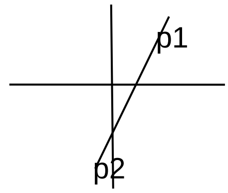
معادلة المستقيم

١- ايجاد طول قطعة مستقيم بين نقطتين :

l $=\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}$

مثال :جد طول قطعة المستقيم الذي يصل نقطتين p1 (7,6), p2 (-1,-9)

الحل



l$=\sqrt{(x2-x1)^2+(y2-y1)^2}$ $=\sqrt{(-1-7)^2+(-9-6)^2}$ $=\sqrt{-8^2 \pm 15^2}$ =289=17

٢- ايجاد نقطة تقسيم قطعة مستقيم بنسبة معينة m/n

X$=\frac{mx2+nx1}{m+n}$ $y=\frac{my2+ny1}{m+n}$

*كحالة خاصة اذا كانت $y=\frac{my2-ny1}{\mathrm{m+n}}$ ينتج $m=n$

اذن $y=\frac{y1+y2}{2}$, $X=\frac{x1+x2}{2}$ وتسمى (x,y) نقطة التنصيف

مثال :اذا انطلق جسم من النقطة $p1(-1,2)$ الى النقطة $p2(2,-2)$ على خط مستقيم جد مقدار التغير $\Delta X, \Delta y$ ثم جد طول المستقيم $p1p2$

الحل :

$\Delta X=x2-x1=2-(-1)=3$ $\Delta y=y2-y1=-2-2=-4$

$l=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=5$

مثال :اذا انطلق جسيم من النقطة $A(-2,3)$ وطرأ على احداثية التزايد $\Delta X=5$, $\Delta y=-6$ فما موضع Xالجديد

الحل:

$\Delta x=x2-x1$ --- $5=x2+2$----- $X2=3$

$\Delta y=y2-y1$ ------ $-6=y2-3$ ----- $y2=-3$

اذن احداثيات الموضع الجديد هي $(3,-3)$

مثال :جد احداثيات منتصف قطعة المستقيم الواصل بين $p1(-2,4)$, $p2(6,-8)$

الحل: $m=n$ بسبب $y=\frac{my2-ny1}{\mathrm{m+n}}$ اذن

$x=\frac{-2+6}{2}=2$, $y=\frac{4+(-8)}{2}=-2$

تمارين:

١- جد اطوال المستقيمات الواصلة بين كل نقطتين مما يأتي :

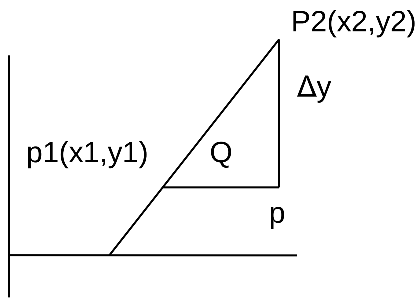
a-(2,3) ,(5,7) b-(-1,-5),(7,10)

٢- جد احداثيات نقطة تقسيم كلا من المستقيمات الاتية بالنسبة المعطاة ازاء كل منهم

a-(2,5) ,(8,11) 1/2   b-(-1,4) ,(7,-4)   3/5

٣- ميل المستقيم :

ليكن L *مستقيما غير مواز للمحور* y *ولتكن* P1,P2 *نقطتين مختلفتين عليه كما في الشكل*



slope (m) = { PP2 الصعود الرأس / PP1 الانتقال الافقي

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y2-y1}{x2-x1}$$

ويكتب ميل المستقيم بالقانون الاتي :   m=tanΦ

عند استخراج ميل المستقيم يجب مراعاة النقاط التالية (حالات ميل المستقيم)

١-يكون ميل المستقيم صفرا اذا كان المستقيم L موازيا لمحور السينات اي   m=tan Φ =tan0=0

٢- ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات يساوي مالا نهاية اي ان المستقيم L يصنع زاوية ٩٠ مع محور X الموجب ∞ = m=tan 90

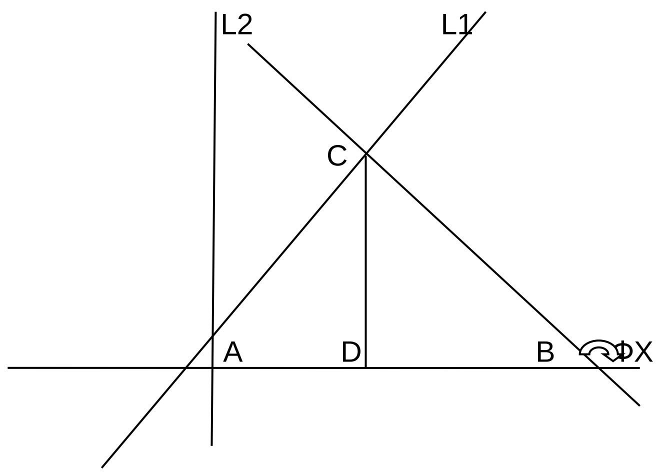
٣- يكون ميل المستقيم موجب اذا كان المستقيم L يصنع زاوية حادة مع محور X (محور السينات)

٤- يكون ميل المستقيم سالبا اذا كان المستقيم L يصنع زاوية اكبر من ٩٠ مع محور السينات الموجب

٥- تكون المستقيمات L1,L2 متوازين اذا واذا فقط m1=m2

٤- المستقيمات المتعامدة

لو فرضنا المستقيمين L1,L2 في الشكل متقاطعان بزاوية قائمة



M1=CD/AB

لان الزاوية منفرجة M2=- (CD/DB)

في المثلثين ADC ,CDB متشابهان

$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}} = \frac{DB}{CD}$ m2=(-1/m1)

٥- معادلات الخط المستقيم

- معادلة المستقيم بدلالة الميل ونقطة

y-y1=m(x-x1)ميل المستقيم

M= $\frac{y2-y1}{x2-x1}$ **معادلة المستقيم**

- معادلة المستقيم بدلالة نقطتين

$$\frac{y2-y1}{x2-x1} = \frac{y-y1}{x-x1}$$

-معادلة المستقيم بدلالة m , b حيث m الميل و b المقطع الصادي

Y=mx+b

مثال :جد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم 2x-3y=6 والمار بالنقطة (5,-3) .

الحل: المعادلة العامة للمستقيم بدلالة الميل y=mx+c

3y=2x-6---- y= $\frac{2}{3}x - \frac{6}{3}$ -----m=2/3

ميل العمود =1/m= -3/2

اذن معادلة المستقيم المار بنقطة وعلم ميله y-y1=m(x-x1)

y+3=-3/2(x-5) ---3x+2y-9=

مثال:جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2,3) ويصنع زاوية قدرها 135 مع محور X

الحل: m=tanΦ

m=tan135

m=tan(180-45)=-tan45

m=-1

اذن معادلة المستقيم y-3=-1(x-2)

y+x-5=0

مثال:ماهي زاوية ميل المستقيم 2x+y=4

الحل: نكتب المعادلة بصيغة y=-2x+4

m=tanΦ----Φ=$\tan^{-1}$ m

Φ=$\tan^{-1}$ (-2) =-63

مثال :جد ميل ومحل نقطة تقاطع المستقيم 3x-2y=12 مع محور السينات ومحور الصادات

الحل : y=mx+b نكتب المعادلة مثل الصيغة

$2y=3x-12$----$y=3/2x-6$

اذن $m=3/2$

مقدار القطع مع محور الصادات 6- بجعل $x=0$ النقطة $(0,-6)$

مقدار القطع مع محور السينات 4النقطة $(4,0)$

مثال:اوجد ميل المستقيم $2x+3y=5$ وما يقطعه من محور y

الحل:بالمقارنة مع المعادلة $y=mx+b$

$y=(-2/3)x+5/3$

$m=-2/3$, $b=5/3$

*يمكن ايجاد الصف العمودي بين نقطة ومستقيم بأستخدام القانون $d=\frac{|Ax1+By1+c1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

مثال: جد بعد النقطة $A(-1,0)$ عن المستقيم $2x+3y=5$

الحل : $d=\frac{|2(-1)+(3)(0)-5|}{\sqrt{4+9}}=\frac{|-7|}{\sqrt{13}}=\frac{7}{\sqrt{13}}$

*تمارين ص ١٢٣

- معادلة المستقيم بأستخدام المحدد

لايجاد معادلة المستقيم يمر بنقطتين $(x1,y1),(x2,y2)$ نقوم بحل المحدد

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \end{bmatrix}=0$$

مثال :جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-3,5),(6,-4)$

الحل: $$\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}=0$$

$=x+y-1=0$

الاسبوع السادس: المثلثات ,بعض القوانين المهمة في النسب المثلثيه

*في المثلث ثلاثة اضلاع وثلاث زوايا ومجموع الزوايا يساوي 180 , في المثلث القائم الزاوية احدى الزوايا 90 ومجموع الزاويتين الاخريتين مجموعهما 90

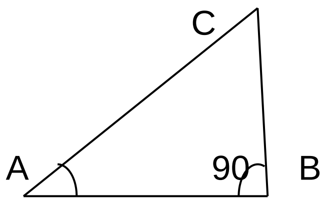
نظرية فيثاغورس:في مثلث قائم الزاوية يكون مجموع مربعي طولي الضلعين المحاذيين للزاوية القائمة يساوي مربع طول الوتر

$/ac/^2=/ab/^2 +/ bc/^2$

١-الضلع CA المقابل للزاوية B يسمى الوتر

٢-الضلع AB المقابل للزاوية C

٣-الضلع BC المقابل للزاوية A



- جاA ----جيب الزاوية ----- sin a --- sina=

-جتاA ----جيب تمام الزاوية cos a

-ظا A ----ظل الزاوية tan a

-ظتا A---ظل تمام الزاوية cot b

-قا A----قاطع الزاوية sec b

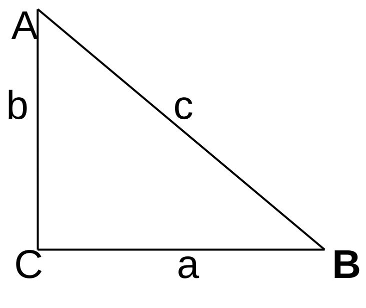
- قتا B---قاطع تمام الزاوية cosc b

sina= bc/ac cosa =ab/ac tana=cb/ab cota= ab/cb seca=$\frac{ac}{ab}$ cosc=$\frac{ac}{bc}$

العلاقات بين النسب المثلثية:

sin a .cos a=1 , cos a. sec a=1 , tan a . cot a=1 , tan a= $\frac{sina}{cosa}$, cot a= $\frac{cosa}{sina}$

الزاوية المتممة:



في المثلث ABC القائم الزاوية في c و (90 = A+<B>) ،مجموع الزوايا الداخلية للمثلث تساوي 180

الزاوية B تتمم الزاوية A و بالعكس ، الزاوية A تتم الزاوية B لانهما مجموع الزوايا 90

sin B= b/c =cos A=Cos (90-B) , Cos B =a/c=Sin A =sin (90-B)

Tan B=b/a=Cot A=cot(90-B) , Cot B =a/b =Tan A=tan (90-B)

Sec B=c/a= Cosc A=Sec (90-B) , Cosc B=c/b =Sec A =Cosc (90-B)

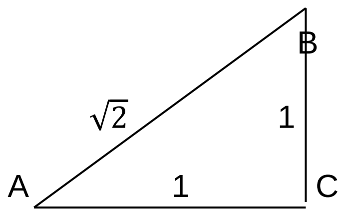
ومن هذا يمكن تمثيل اي نسبة مثلثية بدلالة تمامها

Sin30 =Cos60 , Sec 30 =Cosc 60 , tan42 =Cot 48

النسبة المثلثية لزوايا خاصة

الزوايا الخاصة هي (صفر ،30 ،45 ،60 ، 90)

- الزاوية 45



لاحظ النسب

$\sin 45=1/\sqrt{2}$,$\mathrm{Cos}45=1/\sqrt{2}$,$\mathrm{Tan}45=1$

$\mathrm{Cot}45 =1$, $\mathrm{Sec}\ 45= \sqrt{2}$, $\mathrm{Cosc}\ 45 =\sqrt{2}$

- الزاوية 30- 60

$\mathrm{Sin}30=1/2 =\mathrm{Cos}\ 60$, $\mathrm{Cos}\ 30 =\frac{\sqrt{3}}{2} =\mathrm{Sin}\ 60$, $\mathrm{Tan}\ 30 =1/\sqrt{3} =\mathrm{Cot}\ 60$

-الزاوية (90- 0)

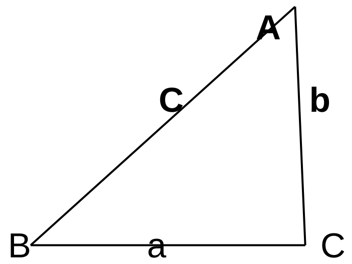
$\mathrm{Sin}\ 0=0$, $\mathrm{Cos}0 =1$, $\mathrm{Cot}\ 0= \varphi$ $\mathrm{Tan}\ 0=0$, $\mathrm{Sec}\ 0=1$, $\mathrm{Cosc}\ 0= \varphi$

$\mathrm{Sin}\ 90 =1$, $\mathrm{Cos}\ 90 =0$, $\mathrm{Tan}\ 90 = \varphi$, $\mathrm{Cot}\ 90 =0$, $\mathrm{Sec}\ 90 = \varphi$, $\mathrm{Cosc}\ 90=1$

مثال : جد ناتج مايأتي بتعويض قيم النسب المثلثية فيما يأتي : ص ٣١

$5\mathrm{Cos}60 -3\ \mathrm{Sin}30 +2\tan 45$, $7\tan 30 -\cot 45 +\cos 0 -7\cot 60$

مساحة المثلث القائم الزاوية :



في المثلثABC القائم الزاوية في C اذا فرضنا الضلع AC=b والضلع AB=c والضلع BC=a والمساحة K

$$\left.\begin{array}{l}1\text{-}K=1/2\ ab=1/2\ ac\cos A =1/2bc\sin A\\ 2\text{-}K=b^2\tan A=1/2a^2\tan B\\ 3\text{-}\ K=1/2C^2\sin A\ \mathrm{Coa}\ A =1/2\ C^2\sin B\cos B\end{array}\right\}\text{القوانين}$$

مثال : جد مساحة المثلث القائم الزاوية الذي فيه وتر يساوي ٢٠ وحدة طول احدى زواياها الحادة تساوي 60 درجة

الحل

$K=1/2\ C^2\sin A\cos A =1/2(20)^2.\ \mathrm{Sin}60\ .\mathrm{Sin}60 =50\sqrt{3}$

قوانين اساس في المثلثات:

$Sin^2\Phi + Cos^2\Phi = 1$ -------(1)

$Tan^2\Phi + 1 = Sec^2\Phi$ -------(2)

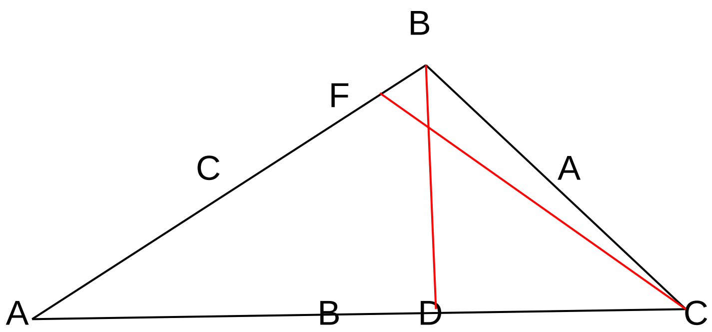
بعض القوانين المستخدمة في حل المثلثات:

- قانون الجيب

$$\frac{a}{Sin\,A} = \frac{b}{Sin\,B} = \frac{c}{Sin\,C}$$

-قانون الجيب تمام

Cos A=$\frac{B^2+C^2-A^2}{2BC}$, Cos B=$\frac{A^2+C^2-B^2}{2Ac}$, Cos C=$\frac{A^2+B^2-C^2}{2AB}$



يمكن حل المثلث بأنزال عمود من احد رؤوسه على الضلع المقابل له لكي نحصل على مثلثات قائمة الزوايا ونستخدم القوانين السابقه في حلها

في المثلث ABD نستنتج ان Sin A=BD/AB ويؤدي ان (BD=AB Sin A)

وفي المثلث BDC نستنتج Sin c=BD/BC ويؤدي الى ان (BD=BC Sin c) ومن المعادلتين نستنتج

AB SinA=BC Sincويؤدي الى $\frac{AB}{SinC} = \frac{BC}{Sin\,A}$ اي ان $\frac{C}{Sin\,C} = \frac{A}{SinA}$ وهذا قانون الجيوب وبأنزال العمود CF على AB ومن المثلثين القائمين BCF, AFC نستنتج $\frac{B}{Sin\,B} = \frac{A}{Sin\,A}$

اذن قانون الجيوب

$$\frac{a}{Sin\,A} = \frac{b}{Sin\,B} = \frac{c}{Sin\,C}$$

والان نستنتج قانون الجيب تمام

فيثاغورس $C^2=BD^2+AD^2$

$=BD^2+(B-DC)^2$

$=BD^2+B^2-2BDC+DC^2$

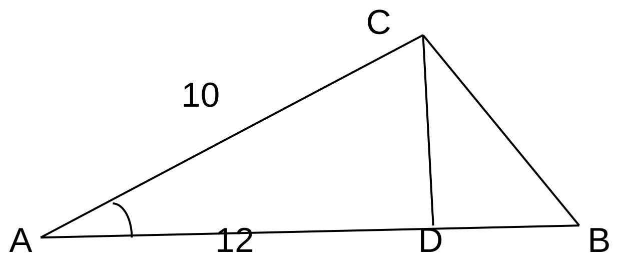
بما انِ $BD^2+DC^2= A^2$ ، DC=A Cos C

اذن $C^2=A^2+B^2-2BA\ Cos\ C$

وبنفس الطريقة نستنتج

Cos A=$\frac{B^2+C^2-A^2}{2BC}$, Cos B=$\frac{A^2+C^2-B^2}{2Ac}$, Cos C=$\frac{A^2+B^2-C^2}{2AB}$

مثال :في الشكل المجاور AC=10cm ,AB=12cm, A=30°



المطلوب حل المثلث

الطريقة الاولى ننزل CD عمودي على AB

cd=10 Sin 30=5cm

ad=10 Cos 30=8.66cm

اذن db=12-8.66=3.34

tan b=cd/bd=1.497=56

c=180-30+56=93

$BC^2=(3.34)^2+(5)^2=6.02cm$

الحل بطريقة ثانيه:القانون

تمارين ص ٤٩ من كتاب الرياضيات التطبيقيه

القطاع الدائري:

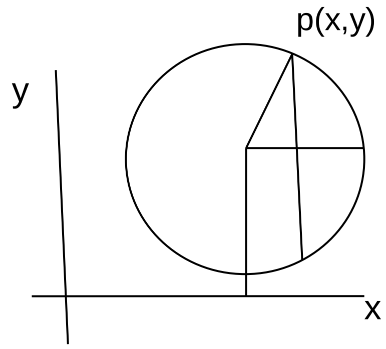
نفرض (h,k) نقطة ثابته تمثل مركز الدائرة وان $p\ (x,y)$ نقطة متحركة وتبعد عن المركز المسافة r بأستخدام قانون المسافة بين نقطتين ينتج المعادلة التالية (المعادلة العامة للدائرة)

$(x-h)^2+ (y-k)^2=r^2$

علما ان كل من r,h,k كميات ثابته

اذا فرضنا $h=0$, $k=0$ تنتج المعادلة التالية

$x^2+y^2=r^2$ معادلة الدائرة مركزها نقطة الاصل



مثال: جد معادلة الدائرة التي مركزها $(4,-3)$ ونصف قطرها 6

الحل:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-4)^2+(y+3)^2=36$

*يمكن القول ان اي معادلة من الدرجة الثانية تمثل معادلة الدائرة بشرط ان الحد xy محذوف ومعامل x^2 يساوي معامل y^2

مثال: جد مركز ونصف قطر الدائرة ل

$2x^2+2y^2-8x+5y+8=0$

$x^2+y^2-4x+\frac{5}{2}y+4=0$ بأضافة ١٦/٢٥ للطرفين

$x^2+y^2-4x+\frac{5}{2}y+4+\frac{25}{16}=\frac{25}{16}$

$x^2-4x+4+y^2+\frac{5}{2}y+\frac{25}{16}=\frac{25}{16}$

$(x-2)^2+(y+\frac{5}{4})^2= \frac{25}{16}$

اذن المركز $(2,5/4)$ ونصف القطر $5/4$

الزاوية الدائرية:

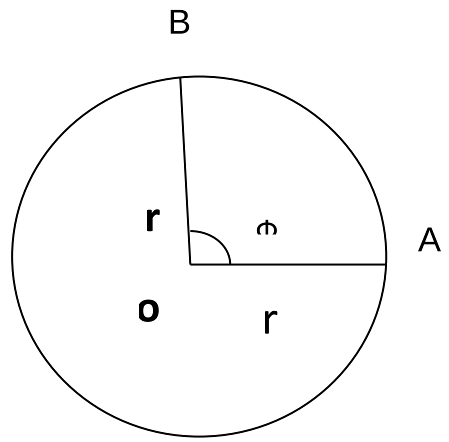
وهي الزاوية التي يقع رأسها في المركز والضلعان الاخران هما انصاف اقطار الدائرة الزاويةΦ=الزاوية AOB اذن الزاوية $\Phi=1$ زاوية نصف قطرية

*لتحويل الدرجات الى زوايا نصف قطرية نضرب عدد الدرجات ب ¶/180 ولتحويل الزوايا النصف القطرية الى درجات نضرب عدد الزوايا النصف القطرية ب 180/¶

طول القوس (على محيط الدائرة)

arc AB=r. Φ (Φ radian)

القاعدة : طول القوس AB يساوي حاصل ضرب نصف قطر الدائرة في مقدار المركزية بالتقدير الدائري



مثال :جد طول القوس الذ يصنع زاوية مقدارها 10° في دائرة نصف قطرها 12 قدما

الحل : نحول 10 الى تقدير دائري

10*¶/180=¶/18

AB=r . Φ =¶/18 . 12= 2¶/3

مثال :جد طول القوس المقابل للزاوية المركزية 48° درجة ونصف قطرها 10 قدم ؟

القطاع الدائري:

القطاع الدائري: هو جزء من سطح الدائرة محدد بقوس من الدائرة وبنصفي القطرين المارين بنهايتي القوس

مساحة القطاع ومساحة القطعة :

Sin a=y/1 ---y=Sin a , Cos a=x/1----x=Cos a. ---- b(x,y) =(Cos a, sin y)

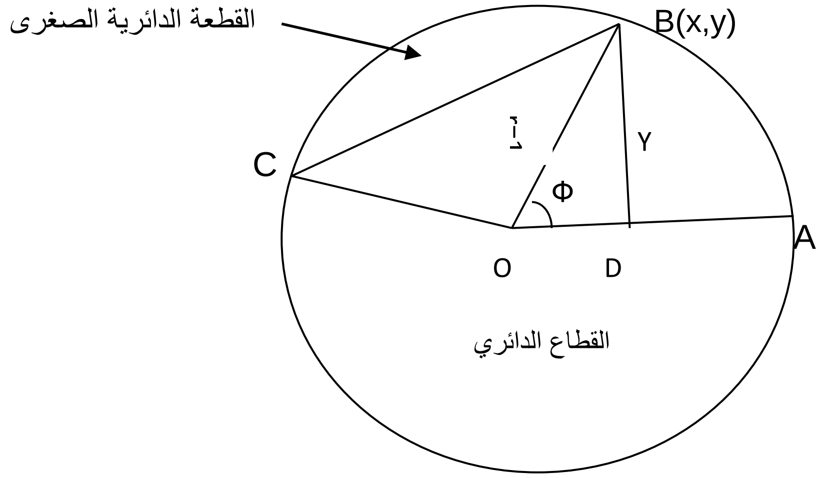
مساحة القطاع AOB

sector (AOB=1/2 Φ r²)

مساحة القطعة BA=مساحة القطاع - مساحة المثلث OAB

القطعة الدائرية: هي جزء من سطح الدائرة محدد بقوس فيها ووتر مار بها يوازي ذلك القوس

مساحة القطعه = {1/2 r²{Φ-Sin Φ ، (Φ بالتقدير الدائري ، sin Φ بالدرجات)



مثال :جد مساحة القطعة لدائرة نصف قطرها ٦ قدم وزاويتها ٤٠ درجة ؟

الحل:

مساحة القطعة$=1/2\ r^2\ \{\Phi - \sin\Phi\} = 1/2\ (6)^2\{40 * (¶/180) - \sin 40\} = 0.996$ قدم²

مثال٢/ماهي مساحة قطاع زاويته المركزية (36) درجة ونصف قطر دائرته 8 قدم

Sector area مساحة القطاع $= 1/2\ \Phi\ r^2 = 1/2\ 36 * ¶/180 * 64 = 20.102$ قدم ²

مثال/جد نصف قطر الدائرة التي فيها القوس طوله 4 قدم وزاويته (1.5 R)

length of arc $= r\Phi$, $4 = r\ (1.5)$, $r = 4/1.5 = 2.666$ قدم

المشتقة:

*ميل المستقيم(المماس) (m) =dy/dx

معادلة المماس (($y-y1=m(x-x1$)

قواعد الاشتقاق :

١- مشتقة العدد الثابت تساوي صفر

$f(x)=y=connstant$ $f(x)=y=connstant$ فأن $f^{-}(x)=dy/dx=0$

٢- مشتقة المقدار الجبري تكون

$y=a\,x^n$ فأن $dy/dx=n\,a\,x^n-1$

٣- توزيع المشتقة على عدة مقادير جبرية

$y=f(x)+g(x)$ فأن $dy/dx=f^{-}(x)+g^{-}(x)$

٤-اشتقاق حاصل ضرب دالتين

$d/dx(vu)=udv/dx+vdu/dx$

٥-اشتقاق حاصل قسمة دالتين

$$d/dx(u/v)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

مثال :جد مشتقة الدالة $y=x^3-7x+5$ في النقطة $x=3$ ؟

$dy/dx=3x^2-7=m$ نعوض قيمة x

$m=3(3)^2-7=20$

مثال: جد معادلة المستقيم المماس للمنحني $y=2x^2-2x+3$ عند النقطة $(1,3)$

$dy/dx=4x-2$

اذن ميل المستقيم المماس هو $f^{-}(1)=2$

تكون معادلة المستقيم المماس $(y-y1=m(x-x1$

$y-3=2(x-1)$

مثال: جد dy/dt ل $y(t)=3\sqrt{t}-2t^2-t-7$

$y(t)=3(t)^{½}-2t^2-t-7$ ---------$dy/dt=3*1/2(t)^{½-1}-4t-1-0$

$dy/dt=3/2\frac{1}{\sqrt{t}}-4t-1$

السرعة والتعجيل على خط مستقيم :

السرعة :هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن اذا فرضنا ان سرعة جسم معين هي V والمسافة المقطوعة هي S خلال مدة من الزمن t

نلاحظ ان $V=ds/dt$

التعجيل :هو معدل التغير في السرعة خلال وحدة زمن اذا فرضنا ان التعجيل هو a السرعة V

فأن $a=dv/dt$ المسافة التي يقطعها الجسم مقاسة بالامتار بعد t من الثواني sec

امثلة:

$y=x^3/3+x^2/2+1$, $y=(x+1)(x^2+1)$, $y=(3x^2-x)(x^3+2)$, $y=\frac{x}{x^2+3}$, $y=\frac{x^2}{1-x^3}$, $y=(3x+2)^{-1}$, $y=\sqrt{x+2}$

$y=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$,

مشتقة الدوال المركبة

اذا فرضنا $y=f(m)$,$m=g(x)$ يؤدي الى ان $y=f(g(x))$ تسمى دالة مركبة

من الواضح ان مشتقة الدال المركبة تتكون من ثلاثة اشتقاقات هي dy/dx , dy/dm , dm/dx

اذا كان $y=f(m)$,$m=g(x)$ فأن (dy/dx= dy/dm . dm/dx) تسمى بقاعدة السلسلة chain rule

مثال :اذا علمت ان $u=x^2-4$, $y=3u^2-2u+6$ جد dy/dx

الحل: dy/dx= dy/du . du/dx

dy/du=6u-2 , du/dx=2x

dy/dx=(6u-2)(2x) =12ux-4xdy/du=6u-2 , du/dx=2x

dy/dx=(6u-2)(2x) =12ux-4x نعوض عن قيمة u

$dy/dx=12x(x^2-4)-4x=12x^3-48x-4x=12x^3-52x$

اشتقاق النسب المثلثية

(sin u=cos u, cos u= - sin u ,tan u= sec^2 u, cot u= - csc^2 u ,secu=sec u tan u , csc u= - csc u cot u)

(في مشتقة الزاوية)

مثال : جد dy/dx للدوال التالية

1- $y=\sin^3 x/3 - 3\sin x/3$ ----$dy/dx=3\sin^2 x/3 *1/3 -3\cos x/3 *1/3 =\sin^2 x/3\cos x/3 -\cos x/3$

2- $y=x^2 \sin x+2x\cos x -2\sin x$ ---- $dy/dx=x^2 \cos x +\sin x *2x +2x (-\sin x) +\cos x *2 - 2\cos x$

$=x^2\cos x + 2x \sin x -2x \sin x +2\cos x -2\cos x = x^2\cos x$

3- $y =\tan^2 (\cos x)$ ---- $dy/dx =2\tan(\cos x) \sec^2 (\cos x) *-\sin x = - 2\tan(\cos x)\sec^2(\cos x) \sin x$

4- $y=\tan t$, $x= \sec t$ ------ $dy/dt =\sec^2 t$, $dx/dt=\sec t \tan t$

$dy/dx =(dy/dt) / (dx/dt) = \sec^2 t /\sec t \tan t = \sec t / \tan t= (1/\cos t) / (\sin t / \cos t) = 1/\cos t * \cos t /\sin t = 1/\sin t = \csc t$

مشتقة الدوال العكسية

d/dx $\sin^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du/dx$, d/dx $\cos^{-1}u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\, du/dx$, d/dx $\tan^{-1}u = \frac{1}{1+u^2}\, du/dx$

d/dx $\cot^{-1}u = \frac{-1}{1+u^2}\, du/dx$, d/dx $\sec^{-1}u = \frac{1}{|u|.\sqrt{u^2-1}}\, du/dx$, d/dx $\csc^{-1}u = \frac{-1}{|u|.\sqrt{u^2-1}}\, du/dx$

مثال : جد مشتقة كل من

- $y=x^3 . \cot 3^{-1}\sqrt{x}$
- $y=\cos^{-1}\sqrt{x}$
- $y=\cos^{-1} X^2$

تمارين ص ٢٠٧ من كتاب الرياضيات

مشتقة الدالة الضمنية:

1- $x^2+y^2=25$ ---- $2xdx+2ydy=0$-----$dy/dx= -x/y$----$dy/dx=-x/\sqrt{25-x^2}$

2-$x^2+x^3=y+y^4$---$2x+3x^2=1+4y^3dy$------$dy/dx=2x+3x^2/1+4y^3$

المشتقات ذات المراتب العالية :

المشتقه الثانية $\ddot{y}$, $\ddot{f}(x)$, d^2y/dx^2 , d/dx $\bar{f}(x)$

وهكذا بالنسبة الامر يتعلق بالمشتقة الثالثة والرابعه بالطريقه نفسها

مشتقة الدالة اللوغاريتيمة :

$dy/dx \ln u = 1/u . du/dx \quad = \log_e u$

خواص الدوال اللوغارتيميه :

- $\ln (f1(x) * f2(x)) = \ln f1(x) + \ln f2(x)$
- $\ln f1(x)/f2(x) = \ln f1(x) - \ln f2(x)$

امثله:

1- $\ln (\cos x) = -\sin x / \cos x$ 2- $y= \log_e(3x^2+2)^2$ 3-$y=\ln (1+x/1-x)$

التكامل :يعرف التكامل بأنه عملية ايجاد الدالة التي عملت مشتقتها ويقال عليها احيانا عكس التفاضل او التكامل الغير محدد

$\int f(x)dx$ = F(x)+c

قوانين التكامل:

1- $\int a\,dx = ax + c$ 2-$\int x^n\,dx = \frac{Xn+1}{n+1}$ +c   3-$\int af(x) = a\int f(x)$

4-$\int\{f(x) \pm g(x)\} = \int f(x) \pm \int g(x)$ 5-

ex:1- $\int 5\,d(x) = 5x + c$ 2- $\int x^2 d(x) = \frac{x^3}{3} + c$ 3-$\int 5X^2 = 5\int X^2 = \frac{5X^3}{3} + c$

4-$\int X^2 - 2x + 5dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + c$ 5- $\int 3x^2 + (\frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$

6- $\int \frac{6}{x^7}\,dx$

*في حالة المقدار المراد تكامله داخل قوس مرفوع للاس فيجب توفر مشتقة داخل القوس من ثم نكامل المقدار

-$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ - $\int (3x-2)^{-2}\,dx$

تكامل الدوال المثلثية :

1-$\int$ Sin u du = - Cos u+c   2-$\int$ Cos u du = Sin u+ c   3-$\int$ Sec^2 u du =tan u+c
4-$\int$ Csc^2 du = - Cot u +c   5-$\int$Sec u . tan u du =Sec u +c   6-$\int$Csc u . Cot u du = - Csc u +c
7-$\int$ tan u du = - ln (Cos u) +c or +Ln Sec u +c   8- $\int$ Cot u du = Ln(sin u)+c
9-$\int$Sec u du =Ln (Sec u +tan u) +c   10-$\int$ Csc u du = - Ln (Csc u +Cot u)+c

*لايجاد معادلة المنحني للميل نجد تكامل ذلك الميل

m=dy/dx

*جد معادلة المنحني الذي ميله يساوي 2x+5 عند النقطة (1,4)

dy/dx=m=2x+5--------$\int$dy/dx=$2x^2$/2+5x+c

$y=x^2+5x+c$ الان نعوض النقطة لايجاد قيمة c

$4=(1)^2+5*1+c$------ c=-2

$y=x^2+5x-2$

ايجاد المسافة من التعجيل والسرعة

V=$\int$ a .dt , S=$\int$ v dt

*سرعة جسم في اي لحظة هي $ds/dt=t^{-3}$ ماهي المسافه التي يقطعها الجسم ؟

الدالة التي تكاملها بشكل لوغارتيم :

$$\int \frac{du}{u} = Ln\ u + c$$

- $\int \frac{x}{x^2-1} dx$ 2- ∫ cos Φ / 1+Sin Φ 3- ∫ 2x+1 / x^2+x

امثلة

- ∫Sin^2x . Cosx dx - ∫$\sqrt{Cosx}$. Sin xdx - ∫ tan^3 x Sec^2x dx

ايجاد تكامل النسب المثلثية ذات الصيغ $sin^n x$, Cos^n x

اذا كانت N *عدد صحيح موجب زوجي نستخدم القوانين التالية*

$Sin^2x=1/2(1-Cos\ 2x)$,$Cos^2\ x=1/2\ (1+Cos2x)$

-∫Cos^2 2x dx -∫$sin^{2/5}$ x Cos^3 x dx

التكامل المحدد:

$_a\int^b f(x)\, d(x) = F(b) - F(a)$

a الحد الأدنى للمحدد و b الحد الأعلى له

*اذا كان $a > b$ فأن

$_a\int^b f(x)\, d(x) = -\, _b\int^a f(x)\, d(x)$

*التكامل المحدد خالي من ثابت التكامل C

*$_a\int^a f(x)\, d(x) = 0$

ex: 1- $_0\int^{\pi} \sin t\, dt$ {cos 180 =-1 ,cos 0 =1} 2- $_{-1}\int^2 \frac{x^2-5x+6}{x-2}\, dx$ (البسط يحل بالتجربه)

تطبيقات التكامل المحدد

المساحة تحت منحني : قانون المساحة :(الدالة غير سالبة و $f>=0$)

$A = {_a}\int^b f(x)dx$

$A^b{}_a = {_a}\int^b y.d(x)$ مع المحور X

$A = {_{y=c}}\int^{y=d} x\, dy$ مع المحور y

*لايجاد تقاطع منحني مع محور x نضع المعادلة تساوي صفرا ونجد x

مثال جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y=x^2+3$ والمحور x, $x=0, x=3$, ثم اوجد المساحة بين المنحني والمحور y؟

(التكامل من ٠الى ٣ و مع المحور y نعوض قيم $x(0,3)$ بالمعادلة لايجاد نقاط التقاطع مع y وهما حدود التكامل)

مثال ص٢٨٨ من $(-3,2)$

*اذا كانت f دالة مستمرة على (a,b) وموجبة فأن $_a\int^b f(x)\, dx > 0$

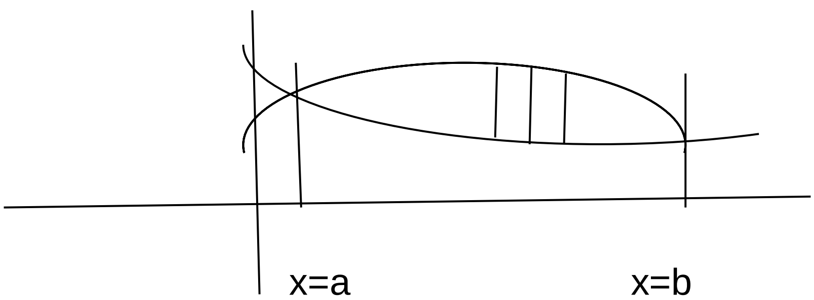
*اذا كانت $f<0$ فأن القيمة المطلقة للتكامل المحدد تساوي المساحة المحدد بمنحني الدالة والمحور x

*المساحة الكلية A تساوي $A=|A1|+|A2|$ ... ... مثال ص٢٩٠

مساحة الشكل المحصور بين منحنيين :

لتكن f,g دوال مستمرة على a,b، $f(x) > g(x)$ لجميع قيم x الواقعة بالفترة (a,b)، A تمثل المساحة للشكل المحصور بين مخطط الدالة f والدالة g والمستقيمين $x=a, x=b$ حيث ان A هي : $A = {_a}\int^b \{ f(x) - g(x)\}\, dx$

*لايجاد نقطة تقاطع المنحني f مع المنحني g نجعل $f(x)=g(x)$



مثال ص٢٩٥:احسب المساحة للشكل المحصور بين مخطط الدالة $x=y^2$ والمستقيم $y=x$ مع توضيح المساحة بالرسم؟

* نساوي المعادلتين لايجاد نقطة تقاطع المنحنيين

$x=\sqrt{x}$

$x=1\ ,\ x=0$

$A={}_0\int^1 \{x^{1/2} -x\}dx \quad =2/3\ x^{3/2} - 1/2\ x^2]_0^1 =2/3 -1/2-0= 1/6$